

# ICE 3680: Geomecánica computacional

## Modelo constitutivo del ECP (Hujeux)

Esteban Sáez R.

26 de diciembre de 2010

### 1 Hipótesis generales y características del modelo

#### Hipótesis 1

Se asumen pequeñas deformaciones y por lo tanto se acepta la descomposición del tensor de deformaciones en una parte elástica y otra plástica:

$$\underline{\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}} = \underline{\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}}^e + \underline{\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}}^p \quad (1)$$

la descomposición anterior también es válida para las deformaciones de volumen  $\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}_v$ , así como para los incrementos de deformaciones de corte  $\underline{\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}}$ :

$$\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}_v = \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}_v^e + \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}_v^p \quad \text{and} \quad \underline{\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}} = \underline{\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}}^e + \underline{\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}}^p \quad (2)$$

#### Hipótesis 2

El principio de esfuerzos efectivos es válido.

#### Hipótesis 3

La parte elástica del comportamiento es isotrópica:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}_v^e &= \frac{1}{K(p')} \dot{p}' \\ \underline{\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}}^e &= \frac{1}{2G(p')} \underline{\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}} \end{aligned} \quad (3)$$

donde el módulo de compresibilidad  $K = K(p')$  y el módulo de corte  $G = G(p')$  son una función del esfuerzo de confinamiento efectivo  $p'$  a través de una relación no lineal:

$$\begin{aligned} K &= K_{ref} \left( \frac{p'}{p'_{ref}} \right)^{n_e} \\ G &= G_{ref} \left( \frac{p'}{p'_{ref}} \right)^{n_e} \end{aligned} \quad (4)$$

donde  $K_{ref}$  y  $G_{ref}$  son los módulos de compresibilidad y de corte para un esfuerzo efectivo de referencia  $p'_{ref}$  y  $n_e$  es el grado de no-linealidad. En efecto, se asume que no hay acoplamiento entre las tasas de deformación de volumen y corte, de forma que  $\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}_v^e$  es independiente de  $\underline{\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}}^e$ , pero  $\underline{\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}}^e$  depende de  $\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}_v^e$ .

## Hipótesis 4

El comportamiento se divide en cuatro sub-dominios:

1. **Dominio elástico:** no hay disipación de energía y las deformaciones son reversibles.
2. **Dominio histerético o pseudo-elástico (estabilizado):** comienza la disipación de energía mediante deformaciones plásticas, pero se desprecia el cambio de volumen plástico ( $\dot{\varepsilon}_v^p = 0$ ).
3. **Dominio intermedio (histerético no estabilizado):** ya no es posible despreciar el cambio de volumen originado por las deformaciones plásticas.
4. **Dominio movilizado:** el esfuerzo de corte ha movilizado completamente la resistencia al corte de la fase sólida del material.

## Hipótesis 5

El comportamiento plástico al corte se separa en tres mecanismos elementales bidimensionales sobre tres planos ortogonales. La disipación de energía plástica se relaciona con las variaciones del círculo de Mohr en el plano ortogonal correspondiente. Cada mecanismo desviador elemental es equivalente a un criterio de ruptura de Mohr-Coulomb en el plano correspondiente. El estado crítico en un plano corresponde al límite del círculo de Mohr de cada mecanismo.

La superficie de fluencia de cada mecanismo desviador es un círculo en un plano normalizado, construido mediante un factor de normalización. En dicho plano normalizado, la regla de flujo es asociada. La movilización de cada mecanismo desviador es progresiva y depende del comportamiento de cada sub-dominio (§1). La variable de endurecimiento en el plano normalizado es el grado de movilización de la fricción del mecanismo.

El material almacena su historia de carga mediante un enfoque de doble memoria: la carga máxima primaria (memoria histórica) y el último cambio de sentido de carga (memoria instantánea).

La descomposición se construye sobre la base definida por vectores unitarios  $\underline{e}_i$ ,  $\underline{e}_j$  y  $\underline{e}_k$  para el mecanismo desviador  $k$ . Para todos los planos orientados por el vector normal  $\underline{e}_k$ , los incrementos de deformaciones plásticas existen sólo en las direcciones definidas por  $\underline{e}_i$  y  $\underline{e}_j$ . Esos incrementos de deformaciones plásticas son una función únicamente del estado de tensiones en el mismo  $k$ -plano asociado al mecanismo desviador  $k$ . Entonces, el tensor de esfuerzos efectivos in el plano  $k$   $\underline{\sigma}'_k$  puede ser escrito como:

$$\underline{\sigma}'_k = \sigma'_{ii} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_i + \sigma'_{jj} \underline{e}_j \otimes \underline{e}_j + \sigma'_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \quad (5)$$

El estado de esfuerzos en el plano  $k$  se define mediante su tensión promedio efectiva  $p'_k$  y su tensor de esfuerzos desviadores  $\underline{s}_k$  (Fig.1a):

$$\begin{aligned} p'_k &= \frac{1}{2} tr \left( \underline{\sigma}'_k \right) \\ \underline{s}_k &= \underline{\sigma}'_k - \frac{1}{2} tr \left( \underline{\sigma}'_k \right) \underline{I}_k \end{aligned} \quad (6)$$

donde  $\underline{I}_k = \underline{e}_i \otimes \underline{e}_i + \underline{e}_j \otimes \underline{e}_j$ . El tensor  $\underline{s}_k$  puede ser interpretado como un esfuerzo desviador  $\underline{s}_k$  en el plano  $k$  de componentes y norma:

$$\begin{aligned} s_{k1} &= \frac{\sigma'_{ii} - \sigma'_{jj}}{2} \\ s_{k2} &= \sigma'_{ij} \\ |\underline{s}_k| &= \sqrt{\frac{1}{4} \left( \sigma'_{ii} - \sigma'_{jj} \right)^2 + \sigma'^2_{ij}} = q_k \end{aligned} \quad (7)$$

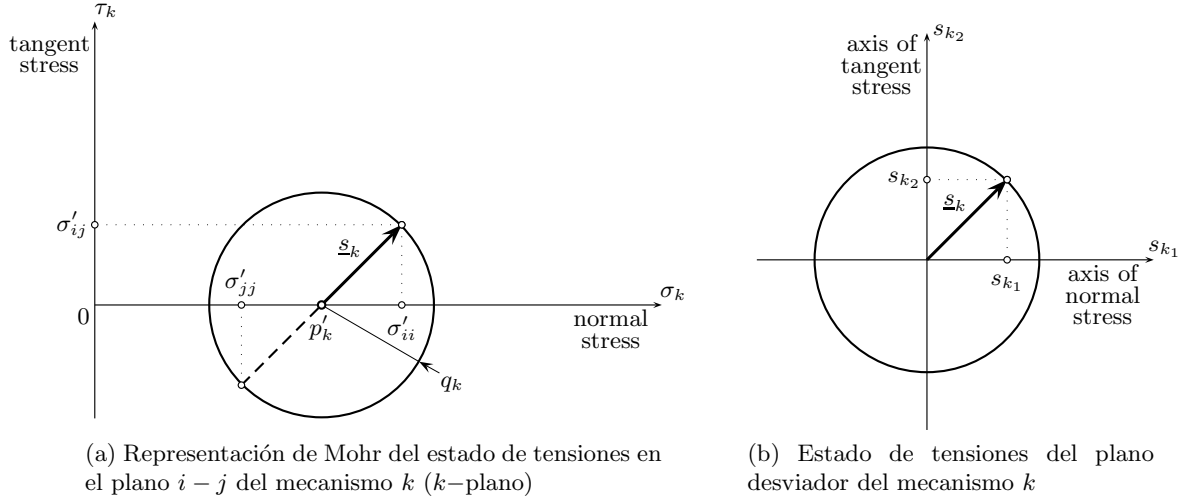


Figura 1: Representación del estado de tensiones para el mecanismo desviador  $k$

donde  $q_k$  es el radio del círculo de Mohr. El plano asociado al esfuerzo desviador  $\underline{s}_k$  es el plano desviador del mecanismo  $k$  (Fig.1b).

De forma muy similar, el tensor de deformaciones en el plano del mecanismo  $k$  se define por medio de la deformación volumétrica  $\varepsilon_{v_k}$  y el tensor de deformaciones de corte  $\underline{\underline{\varepsilon}}_k$ :

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{\varepsilon}}_k &= \varepsilon_{ii} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_i + \varepsilon_{jj} \underline{e}_j \otimes \underline{e}_j + \varepsilon_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \\
 \underline{\underline{\varepsilon}}_k &= \underline{\underline{\varepsilon}}_k - \frac{1}{2} tr \left( \underline{\underline{\varepsilon}}_k \right) \underline{I}_k \\
 \varepsilon_{v_k} &= tr \left( \underline{\underline{\varepsilon}}_k \right)
 \end{aligned} \tag{8}$$

El tensor de deformaciones de corte puede ser representado en forma equivalente como un vector de deformación de corte  $\underline{\bar{\varepsilon}}_k$  de componentes y norma:

$$\begin{aligned}
 \bar{\varepsilon}_{k1} &= \varepsilon_{ii} - \varepsilon_{jj} \\
 \bar{\varepsilon}_{k2} &= 2\varepsilon_{ij} \\
 |\underline{\bar{\varepsilon}}_k| &= \gamma_k
 \end{aligned} \tag{9}$$

donde  $\gamma_k$  es la distorsión del mecanismo  $k$  y su valor corresponde a dos veces el radio del círculo de Mohr (centrado en  $\frac{1}{2}\varepsilon_{v_k}$  Fig.2).

Adoptando la convención de signos de la mecánica de suelos (compresiones positivas), la superficie de fluencia primaria  $f_k$  del plano  $k$  está dada por:

$$f_k(p'_k, \underline{s}_k, r_k, \varepsilon_v^p) = q_k - \sin \phi'_{pp} p'_k r_k F(p', \varepsilon_v^p) \tag{10}$$

donde:

$$\begin{aligned}
 F(p', \varepsilon_v^p) &= 1 - b \log \frac{p'}{p_c} \\
 p_c &= p_{c0} e^{\beta \varepsilon_v^p}
 \end{aligned} \tag{11}$$

en la cual  $\phi'_{pp}$  es el ángulo de fricción en plasticidad perfecta,  $p_{c0}$  es el confinamiento correspondiente al estado inicial (definido por medio del índice de vacíos) sobre la curva de estado crítico,  $\beta$  es el módulo de compresibilidad plástica que introduce la influencia de la densificación del material en la

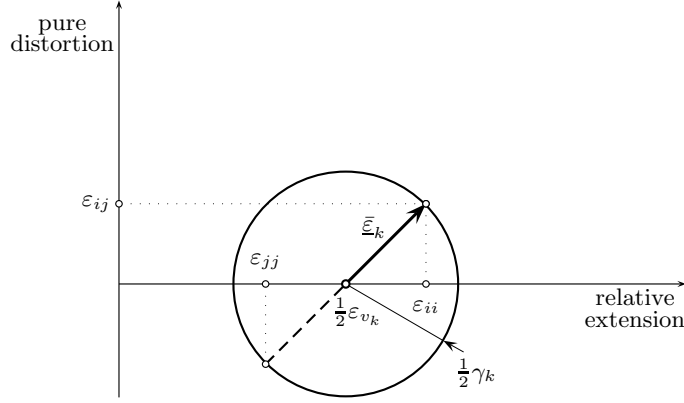


Figura 2: Representación de Mohr's del estado de deformaciones en el plano  $i - j$  del mecanismo  $k$

resistencia final. Ambos parámetros son similares a los empleado en el modelo de Cam-Clay (?). El parámetro  $b$  controla la forma de la superficie de fluencia en el plano  $p'_k - q_k$  y varía desde  $b = 0$  hasta 1 pasando por una superficie tipo Mohr-Coulomb a una tipo Cam-Clay (Fig. 3). El parámetro  $b$  controla la influencia de la densidad o de la pre-consolidación, entonces su valor es cercano a uno para arcillas y muy pequeño para arenas. La función  $F$ , a través de la deformación de volumen plástica  $\varepsilon_v^p$ , introduce endurecimiento volumétrico o endurecimiento negativo con respecto al estado crítico debido a las deformaciones plásticas.

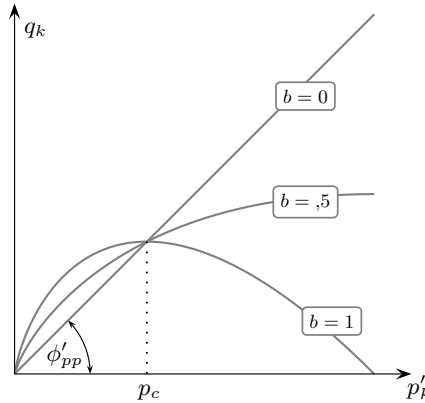


Figura 3: Influencia del parámetro  $b$  en la forma de la superficie de falla

Cada superficie de fluencia desviadora primaria para cada mecanismo  $k$  puede ser interpretada en el espacio de tensiones de corte normalizadas del mecanismo  $\tilde{s}_{k_1} - \tilde{s}_{k_2}$ :

$$\tilde{s}_{k_1} = \frac{1}{\eta_k} s_{k_1} \quad \text{and} \quad \tilde{s}_{k_2} = \frac{1}{\eta_k} s_{k_2} \quad (12)$$

el factor de normalización  $\eta_k$  está dado por:

$$\eta_k(p'_k, \varepsilon_v^p) = \sin \phi'_{pp} p'_k F(p', \varepsilon_v^p) \quad (13)$$

En este plano, las superficies de fluencia son círculos de radio  $r_k$ . Esta variable de endurecimiento  $r_k$  puede ser interpretada como el grado de movilización de la resistencia del mecanismo desviador  $k$ , es decir, como el grado de movilización de la fricción:

$$r_k = \frac{q_k}{\eta_k} = \frac{q_k}{p'_k \sin \phi'_{pp} F} \quad (14)$$

La variable de endurecimiento  $r_k$  corresponde al desarrollo progresivo de la plasticidad debida a la distorsión plástica  $\gamma_k^p$  del mecanismo  $k$ . Entonces, toma en cuenta el endurecimiento isotrópico

generado por las deformaciones de corte plásticas  $\underline{\underline{\varepsilon}}_k^p$  ó  $\gamma_k^p$ . Esta variable varía desde  $r_k^{el}$  (dominio elástico) hasta la unidad para el caso de plasticidad perfecta.

Bajo carga primaria (el super-índice  $m$  indica carga monótona), las superficies de fluencia asociadas a los mecanismos desviadores son círculos de radio  $r_k^m$  centrados en el origen (Fig.5a):

$$\begin{aligned} f_k^m(p'_k, \underline{\underline{s}}_k, r_k^m, \varepsilon_v^p) &= |\underline{\underline{s}}_k| - r_k^m \\ r_k^m &= r_k^{el} + \left( \frac{\gamma_k^p}{a + \gamma_k^p} \right)^{n_p} \\ \gamma_k^p &= \int_0^t \dot{\gamma}_k^p dt \end{aligned} \quad (15)$$

donde el parámetro  $a$  controla la evolución del endurecimiento. El parámetro  $n_p$  controla la evolución del nivel de fricción movilizada con la deformación plástica. Si  $n_p = 1$  la evolución es hiperbólica como curvas de esfuerzo-deformación, pero puede ser modificada para tomar en cuenta la información experimental disponible. La evolución del endurecimiento puede ser derivada de (15):

$$\dot{r}_k^m = \dot{\lambda}_k^p \frac{n_p (r_k^m)^{n_p-1}}{a} \left( 1 - (r_k^m)^{\frac{1}{n_p}} \right)^2 \quad (16)$$

donde  $\dot{\lambda}_k^p$  es el multiplicador plástico del mecanismo  $k$ .

El parámetro  $a$  en la ecuación (15) es un parámetro muy importante del modelo ya que permite controlar la rigidez cuando el suelo está en el dominio plástico. La alternativa más simple es emplear un valor constante, pero es posible modificar dicho valor como una función de las deformaciones de corte plástico. ? definió  $a$  a través de la relación:

$$a = a_1 + (a_2 - a_1) \alpha(r_k) \quad (17)$$

donde  $\alpha(r_k)$  es definido a través de los dominios de comportamiento (§1) descritos más abajo:

$$\alpha(r_k) = \begin{cases} 0 & \text{if } r_k < r_k^{hys} & \text{pseudo-elastic domain} \\ \left( \frac{r_k - r_k^{mob}}{r_k^{mob} - r_k^{hys}} \right)^m & \text{if } r_k^{hys} < r_k < r_k^{mob} & \text{hysteretic domain} \\ 1 & \text{if } r_k^{mob} < r_k < 1 & \text{mobilized domain} \end{cases} \quad (18)$$

en la cual  $r_k^{hys}$  y  $r_k^{mob}$  son los límites de los sub-dominios de movilización de la fricción asociadas al mecanismo  $k$ . De acuerdo a ?,  $\alpha(r_k) \dot{\gamma}_k^p$  puede ser interpretada como la porción del incremento de la deformación de corte plástica asociada a los desplazamientos tangentes entre granos con movilización total de la fricción. Esta porción del incremento induce un re-ordenamiento de los grano y deformaciones plásticas de volumen. Por el contrario,  $(1 - \alpha(r_k)) \dot{\gamma}_k^p$  es la porción del desplazamiento tangente relativo de los granos con movilización parcial de la fricción, la que no induce deformaciones de volumen plásticas. En consecuencia, el parámetro  $\alpha(r_k)$  permite que para condiciones drenada no se desarrollen variaciones de volumen mientras no se alcance un determinado nivel de corte. Adicionalmente, para condiciones no drenadas, permite que la evolución de las presiones de poros dependan del nivel de deformación (?). La evolución al interior del dominio histerético está controlada por el valor de  $m$  (Fig.4).

En relación a la carga cíclica (super-índice  $c$  para indicar carga cíclica), las superficies asociadas a las funciones de fluencia desviadoras son círculos de radio  $r_k^c$  interiores al círculo de carga primaria, ambos tangentes al punto  $\underline{\underline{d}}_k^h$  de normal exterior  $\underline{\underline{n}}_k^h$ :

$$f_k^c(p'_k, \underline{\underline{s}}_k, r_k^c, \varepsilon_v^p, \underline{\underline{d}}_k^h, \underline{\underline{n}}_k^h) = \left| \underline{\underline{s}}_k - \left( \underline{\underline{d}}_k^h - r_k^c \underline{\underline{n}}_k^h \right) \right| - r_k^c \quad (19)$$

donde el punto  $\underline{\underline{d}}_k^h$  corresponde a la última inversión de carga  $h$  del mecanismo  $k$ :

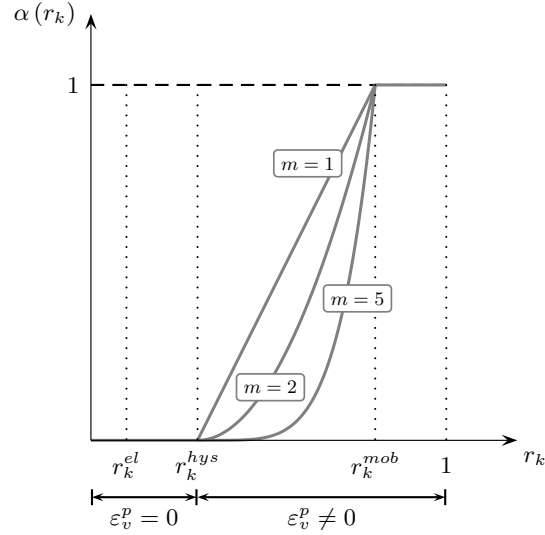


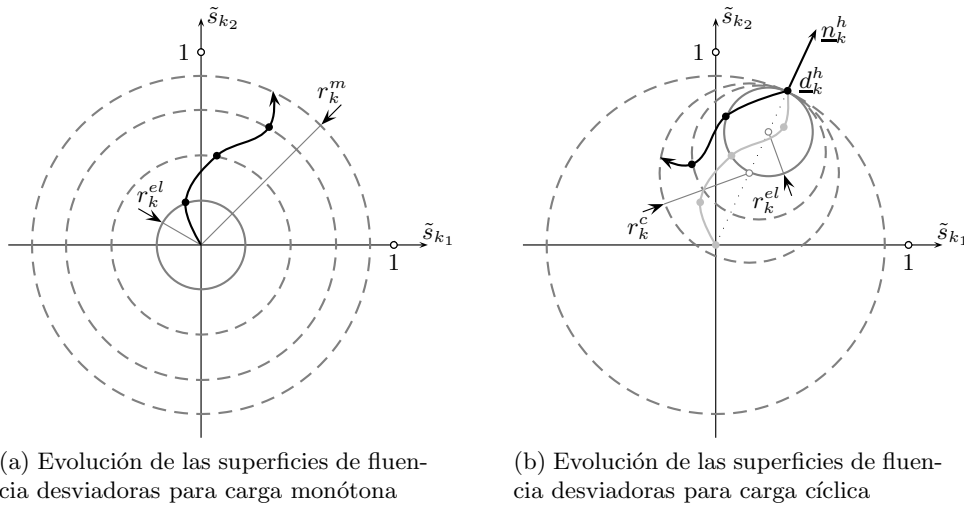
Figura 4: Representación gráfica de  $\alpha(r_k)$  que controla la evolución del mecanismo desviador  $k$

$$\underline{d}_k^h = \frac{q_k^h}{p_k^h} \frac{1}{\sin \phi'_{pp} F(p'^h, \varepsilon_v^p)} \quad \text{and} \quad \underline{n}_k^h = \frac{\tilde{s}_k^h}{|\underline{s}_k^h|} \quad (20)$$

El vector  $\underline{d}_k^h - r_k^c \underline{n}_k^h$  corresponde al vector que va desde el origen del espacio desviador normalizado hasta el centro del círculo cíclico (Fig.5b). La variable de endurecimiento  $r_k^c$  puede ser expresada en términos de la posición del estado e tensiones actuales con respecto a la posición de la última inversión de cargas. Su valor inicial es  $r_k^{el}$ :

$$r_k^c = r_k^{el} + \left( \frac{|\gamma_k^p - \gamma_k^{p^h}|}{a + |\gamma_k^p - \gamma_k^{p^h}|} \right)^{n_p} \quad (21)$$

donde  $\gamma_k^{p^h}$  es la distorsión plástica del mecanismo  $k$  en la última inversión de cargas  $h$ . La variable  $a$  obedece las mismas relaciones que en el caso de carga monótona (17). Los vectores  $\underline{d}_k^h$  y  $\underline{n}_k^h$  son parámetros discontinuos que introducen endurecimiento cinemático al modelo.



(a) Evolución de las superficies de fluencia desviadoras para carga monótona

(b) Evolución de las superficies de fluencia desviadoras para carga cíclica

Figura 5: Evolución de los límites de comportamiento en el plano desviador normalizado del mecanismo  $k$

En resumen, el modelo almacena la historia de cargas de dos formas:

1. La máxima fricción movilizada  $r_k^m$ .
2. La última inversión de cargas  $\underline{d}_k^h$  y  $\underline{n}_k^h$ . Para cada inversión de cargas, el valor de  $\underline{d}_k^h$  es actualizado al valor actual de  $\underline{s}_k$ , adicionalmente  $r_k^c$  es inicializado al límite del dominio elástico  $r_k^{el}$ .

En relación a la evolución de las deformaciones plásticas y a las variables de endurecimiento, se supone que la evolución de las deformaciones plásticas siguen una regla de flujo plástico asociada:

$$\dot{\underline{\varepsilon}}_k^p = \dot{\lambda}_k^p \frac{\partial f_k}{\partial \underline{s}_k} = \dot{\lambda}_k^p \frac{\underline{s}_k}{|\underline{s}_k|} \quad (22)$$

donde  $\dot{\lambda}_k^p$  es el multiplicador plástico del mecanismo  $k$ , y puede ser obtenido escribiendo la relación de consistencia  $\dot{f}_k = 0$  sobre todos los mecanismos activos. La evolución de las deformaciones plásticas de volumen están controladas por una regla de flujo plástico basada en una regla de dilatancia de tipo Roscoe (?):

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_k^p &= \dot{\lambda}_k^p \Psi_k \\ \Psi_k &= \alpha_\psi \alpha(r_k) \left( \sin \psi - \frac{q_k}{p_k} \right) \end{aligned} \quad (23)$$

en la cual  $\psi$  es el ángulo característico (?) que define el límite entre dilatancia ( $\dot{\varepsilon}_v^p < 0$ ) y contractancia ( $\dot{\varepsilon}_v^p > 0$ ) del material (Fig.6) y  $\alpha_\psi$  es un parámetro constante.

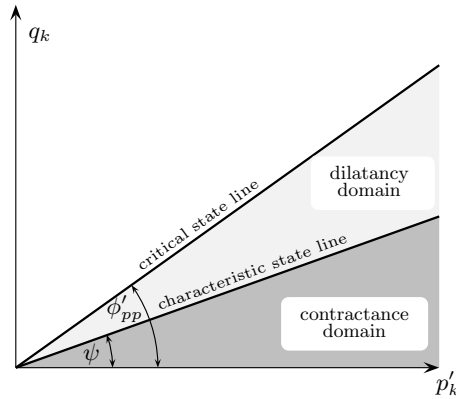


Figura 6: Línea de estado crítico y de estado característico

## Hipótesis 6

Con el objetivo de modelar trayectorias de carga isotrópicas, se ha incluido en el modelo en mecanismo elasto-plástico volumétrico puro. En este mecanismo de consolidación, la movilización es progresiva empleando una variable de endurecimiento asociada a la deformación de volumétrica plástica  $\varepsilon_{v_{iso}}^p$  propia a este mecanismo. En forma similar a los mecanismos desviadores, la función de fluencia puede ser relacionada a un espacio normalizado. La regla de flujo se asume asociada. La memoria del mecanismo también está controlada por un enfoque de doble memoria, donde se almacena la carga monótona y la última inversión de carga. Este mecanismo se activa solamente para la parte isotrópica de la carga y produce únicamente cambios de volumen.

La expresión para la función de carga es:

$$f_{iso}(p', r_{iso}, p_c) = |p'| - d p_c r_{iso} \quad (24)$$

donde  $r_{iso}$  es el grado de movilización del mecanismo, variando desde el límite del dominio elástico  $r_{iso}^{el}$  a la unidad de acuerdo a:

$$r_{iso} = r_{iso}^{el} + \frac{\varepsilon_{v_{iso}}^p}{c \frac{p_c}{p_{ref}} + \varepsilon_{v_{iso}}^p} \quad (25)$$

donde la deformación plástica volumétrica asociada al mecanismo isotrópico puede ser calculada como  $\varepsilon_{v_{iso}}^p$ :

$$\varepsilon_{v_{iso}}^p = \int_0^t \dot{\varepsilon}_{v_{iso}}^p dt \quad (26)$$

El grado de movilización  $r_{iso}$  comienza en el límite elástico  $r_{iso}^{el}$  a la unidad cuando el mecanismo está completamente activado, i.e.  $p' = dp_c$ . La evolución del grado de movilización se puede escribir como:

$$\dot{r}_{iso} = \dot{\varepsilon}_{v_{iso}}^p \frac{(1 - r_{iso})^2}{c \frac{p_c}{p_{ref}}} \quad (27)$$

El parámetro  $c$  controla la evolución de la movilización del mecanismo, por lo tanto el endurecimiento isotrópico. La regla de flujo es asociada, y la ecuación de compatibilidad queda:

$$\dot{p} = d p_c \frac{(1 - r_{iso})^2}{c \frac{p_c}{p_{ref}}} \dot{\varepsilon}_{v_{iso}}^p - r_{iso} d p_c \beta \dot{\varepsilon}_v^p = 0 \quad (28)$$

El término subrayado en la expresión anterior puede ser interpretado como el módulo de endurecimiento intrínseco. De acuerdo a esta expresión, el módulo plástico inicial es independiente del valor inicial de  $p_c$ . Bajo carga isotrópica, cuando se sobrepasa el límite elástico  $r_{iso}^{el}$  ocurre generación de deformación plástica volumétrica ( $\dot{\varepsilon}_v^p > 0$ ) y en consecuencia el mecanismo isotrópico se moviliza ( $\dot{r}_{iso} > 0$ ) y la tensión promedio efectiva crece ( $\dot{p}_c > 0$ ). Cuando este mecanismo está completamente movilizado:  $r_{iso} = 1$  y  $p = dp_c$ . Esta evolución coincide con las observaciones experimentales de las curvas de consolidación, entonces cuando una curva inicial tiene a una recta de consolidación isotrópica en el plano  $e - \log p'$ . El parámetro  $d$  define la distancia de la recta de consolidación isotrópica a la línea de estado crítico en el plano  $e - \log p'$  (Fig.7). Como ambas curvas son paralelas, ambas curvas pueden ser relacionadas mediante:

$$\dot{\varepsilon}_v^p = \frac{1}{\beta} \frac{\dot{p}'}{p'} = \frac{1}{\beta} \frac{\dot{p}_c}{p_c} \quad (29)$$

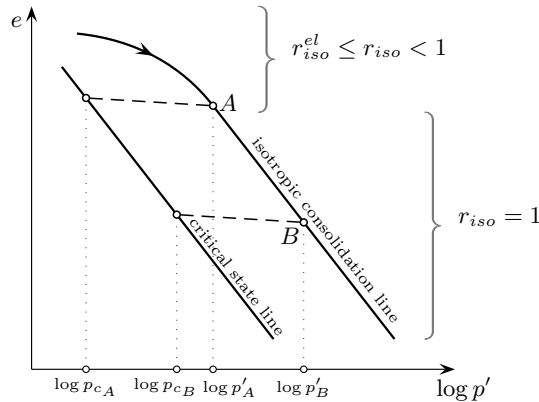


Figura 7: Movilización progresiva del mecanismo isotrópico

Similarmente al mecanismo desviador, este mecanismo puede ser descrito en un sistema normalizado  $\tilde{p}'$  defino por:



$$\tilde{p}' = \frac{p'}{\eta_{iso}} \quad \text{with} \quad \eta_{iso} = d p_c \quad (30)$$

donde  $\eta_{iso}$  corresponde al factor de normalización. Para carga primaria, el límite de la superficie de fluencia es un plano ortogonal al eje  $\tilde{p}'$ , y a una distancia  $r_{iso}^m$  del origen (Fig.8a):

$$f_{iso}^m(\tilde{p}', r_{iso}^m, p_c) = |\tilde{p}'| - r_{iso}^m \quad (31)$$

Tal como para el mecanismo cíclico desviador, el mecanismo isotrópico emplea un enfoque de doble memoria. Luego, bajo carga cíclica, los límites sucesivos de consolidación son planos ortogonales al eje  $\tilde{p}'$  a una distancia  $r_{iso}^c$  del punto de inversión de carga  $r_{iso}^h$  en el espacio normalizado (Fig.8b):

$$f_{iso}^c(\tilde{p}', r_{iso}^c, p_c, r_{iso}^h) = |\tilde{p}' - r_{iso}^h| - r_{iso}^c \quad (32)$$

La variable  $r_{iso}$  puede también ser interpretada como el grado de movilización del mecanismo de consolidación.

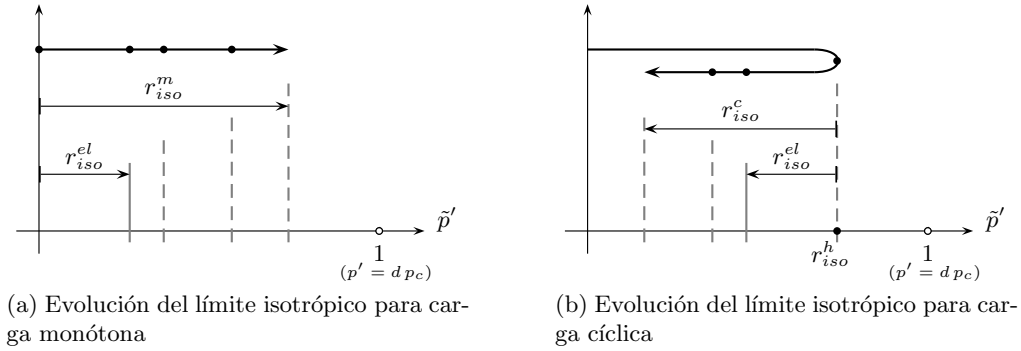


Figura 8: Evolución del límite isotrópico en el eje normalizado del mecanismo de consolidación  $\tilde{p}'$

## Hipótesis 7

Los cuatro mecanismos están acoplados a través de la variable de endurecimiento  $\varepsilon_v^p$ . La tensión efectiva crítica es común para los cuatro mecanismo, por lo tanto el endurecimiento por densidad acopla los cuatro mecanismos:

$$\varepsilon_v^p = \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{v_k}^p + \varepsilon_{v_{iso}} = \frac{1}{\beta} \log \frac{p_c}{p_{c_0}} \quad (33)$$

donde  $\varepsilon_v^p$  es la variación de la deformación plástica volumétrica entre el estado inicial ( $p_c = p_{c_0}$ ) y el estado final ( $p_c$ ). En general, los cuatro mecanismos podrían estar activados. En dicho caso, los multiplicadores plásticos son la solución del sistema no lineal para los multiplicadores plásticos de tamaño  $4 \times 4$ . El endurecimiento está caracterizado por una matriz de endurecimiento en la cual los términos desviadores aparecen únicamente en la diagonal, mientras que el endurecimiento por densidad aparece en todos los términos:

- el endurecimiento negativo está asociado al comportamiento dilatante global:  $\dot{p}_c < 0$  y  $p_{c_0} > p_c$
- el endurecimiento (positivo) está asociado a un comportamiento globalmente contractivo:  $\dot{p}_c > 0$  y  $p_{c_0} < p_c$

## Tratamiento de las tracciones

El estado natural del suelo es en compresión, sin embargo, durante el procedimiento de integración numérica o debido al estado de cargas el suelo podría alcanzar un estado traccionado localmente en espacio y en tiempo. Por lo tanto, el estado de tracciones debe ser definido para materiales no cohesivos de forma de garantizar que no exista resistencia alguna a la tracción.

El criterio adoptado consiste en un modelo de superficie de fluencia elasto-plástica perfecta:

$$f_{tr}(\underline{\underline{\sigma}}') = \text{máx} \{ \sigma'_I, \sigma'_{II}, \sigma'_{III} \} = \sigma'_I \geq 0 \quad (34)$$

donde  $\sigma'_I$ ,  $\sigma'_{II}$  y  $\sigma'_{III}$  son los esfuerzos principales del tensor  $\underline{\underline{\sigma}}'$ . La regla de flujo se asume asociada:

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}_{tr}^p = \dot{\lambda}_{tr}^p \underline{e}_I \otimes \underline{e}_I \quad (35)$$

donde  $\underline{e}_I$  es el vector unitario asociada a la dirección de esfuerzo principal máximo (tracción).

## 2 Integración numérica

Como se describió en la sección anterior, cada mecanismo tiene su propia superficie de fluencia  $f_j$ , regla de flujo  $\underline{\underline{\Psi}}_j$  y multiplicador plástico  $\dot{\lambda}_j^p$ . La evolución de algunas variables de endurecimiento es específica a un determinado mecanismo  $r_j$  o bien es común a los cuatro mecanismo  $\varepsilon_v^p$ . Entonces, un mecanismo inactivo puede experimentar la evolución de sus variables de endurecimiento aún cuando dicho mecanismo no haya sido activado.

En términos generales, la regla de flujo de cada mecanismo puede ser escrita de la forma general:

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}_j^p = \dot{\lambda}_j^p \underline{\underline{\Psi}}_j \quad j = \{1, 2, 3, iso\} \quad (36)$$

donde la parte volumétrica de las deformaciones plásticas está controlada por la regla de dilatancia:

$$\dot{\varepsilon}_{v_j}^p = \dot{\lambda}_j^p \Psi_{v_j} \quad (37)$$

La relación siguiente permite definir las condiciones de estado plástico de cada mecanismo:

$$\dot{\lambda}_j^p \geq 0 \quad ; \quad f_j(\underline{\underline{\sigma}}', r_j, \varepsilon_v^p) \leq 0 \quad ; \quad \dot{\lambda}_j^p f_j(\underline{\underline{\sigma}}', r_j, \varepsilon_v^p) = 0 \quad (38)$$

La evolución de las variables de endurecimiento está dada por sus modelos de evolución:

$$\dot{r}_j = \dot{\lambda}_j^p L_{r_j} \quad (39)$$

y (37). El incremento total de  $\varepsilon_v^p$  se calcula a través de los mecanismos activos:

$$\varepsilon_v^p = \sum_i \varepsilon_{v_i}^p \quad i \in M_{act}^p \quad (40)$$

donde  $M_{act}^p$  es el conjunto de mecanismos activados. Se debe hacer la diferencia entre el conjunto de mecanismos potencialmente activos  $M_{pact}^p$  y el conjunto de mecanismos efectivamente activos  $M_{act}^p$ :

$$\begin{aligned} M_{pact}^p &= \{a \mid f_a = 0\} \\ M_{act}^p &= \left\{ b \in M_{pact}^p \mid \dot{\lambda}_b > 0 \right\} \end{aligned} \quad (41)$$

En el caso de elasto-plasticidad multimecanismos, la denominación de *carga total* se emplea sólo si los cuatro mecanismo son activos, se dice que la situación es de *carga parcial* si no todos los mecanismos se encuentran activos y se habla de *carga elástica* si no hay ningún mecanismo activo.

El incremento total de deformaciones puede ser escrito en términos de la contribución de los mecanismos activos:

$$\underline{\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}} = \underline{\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}}^e + \sum_b \underline{\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}}_b^p \quad b \in M_{act}^p \quad (42)$$

Los multiplicadores plásticos activos son la solución del sistema no-lineal obtenido empleando las ecuaciones de compatibilidad de los mecanismos potencialmente activos ( $\dot{f}_a = 0$ ). Se escribe la ecuación para cada mecanismo potencialmente activo  $a$ , pero manteniendo sólo los términos de los mecanismos activos  $b$  ( $\dot{\lambda}_b^p > 0$ ):

$$\sum_b \left( \frac{\partial f_a}{\partial \underline{\underline{\underline{\sigma}}}} : \underline{\underline{\underline{C}}} : \underline{\underline{\underline{\Psi}}}_b - \partial_{r_a} f_a : L_{r_a} \delta_{ab} - \partial_{\varepsilon_b^p} f_a : \underline{\underline{\underline{\Psi}}}_{v_b} \right) \dot{\lambda}_b = \frac{\partial f_a}{\partial \underline{\underline{\underline{\sigma}}}} : \underline{\underline{\underline{C}}} : \underline{\dot{\underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}}} \quad (43)$$

En *GEFDyn*, se emplea un esquema de integración explícita de paso variable para integrar numéricamente el modelo constitutivo. Para cada paso de carga  $t_n$ , el estado del material se caracteriza por un estado de tensiones  $\underline{\underline{\underline{\sigma}}}'_n$  y las variables de endurecimiento agrupadas en el vector  $\underline{\eta}_n$ . El objetivo es determinar el estado del material para un paso de carga  $t_{n+1}$  caracterizado por  $\underline{\underline{\underline{\sigma}}}'_{n+1}$  y  $\underline{\eta}_{n+1}$  debido al incremento de deformaciones  $\underline{\dot{\underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}}}_{n+1}$ . El incremento de deformaciones es aproximado mediante la relación:

$$\underline{\dot{\underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}}}_{n+1} \approx \frac{\underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{n+1} - \underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}_n}{\Delta t_{n+1}} \quad (44)$$

que se asume constante durante el intervalo  $\Delta t_{n+1} = t_{n+1} - t_n$ . El incremento se calcula de forma iterativa, entonces para una iteración  $k$  la aproximación del incremento es:

$$\underline{\dot{\underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}}}_{n+1}^{k+1} \approx \frac{\underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{n+1}^{k+1} - \underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}_n}{\Delta t_{n+1}} \quad (45)$$

Como puede aparecer no-linealidades importantes durante la carga, el incremento del paso de tiempo  $\Delta t_{n+1}$  es subdividido en un conjunto de sub-pasos  $\delta t_m$  para mejorar la integración:

$$\Delta t_{n+1} = \sum_m \delta t_m \quad (46)$$

Si el conjunto de variables que define el estado del material se denota por  $E$  ( $E = \{\underline{\underline{\underline{\sigma}}}', \underline{\eta}\}$ ), el valor inicial para el procedimiento iterativo se toma de los valores convergidos del paso de carga previo:  $E_{n+1}^0 = E_n$ . Para un subpaso  $m$  asociado a una iteración  $k$  del paso de carga  $n+1$ , entonces a un incremento de deformaciones  $\underline{\dot{\underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}}}_{n+1}^k$ , el conjunto de variables que define el estado del material  $E_{n+1}^{m,k}$  puede ser obtenido de acuerdo a:

$$\begin{aligned} f_j^{m,k}(\underline{\underline{\underline{\sigma}}}'_{n+1}^{m,k}, \underline{\eta}_{n+1}^{m,k}) &\leq 0 \\ \delta A_{n+1}^{m,k} &= A_{n+1}^{m,k} - A_{n+1}^{m-1,k} \quad \forall A \in E \end{aligned} \quad (47)$$

donde:

$$\Delta A_{n+1}^{m,k} = \sum_m \delta A_{n+1}^{m,k} \quad (48)$$

El incremento total del paso de carga para las variables que describen el estado del material pueden ser calculados de acuerdo a:

$$\begin{aligned} \Delta \underline{\underline{\underline{\sigma}}}'_{n+1}^k &= \sum_m \underline{\underline{\underline{C}}}'(\underline{\underline{\underline{\sigma}}}'_{n+1}^{m,k}) : \left( \underline{\dot{\underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}}}_{n+1}^k - \sum_j \sum_m \dot{\lambda}_j^{p,m} \underline{\underline{\underline{\Psi}}}_j^{m,k} \right) \\ \Delta \underline{\eta}_{j_{n+1}}^k &= \sum_m \dot{\lambda}_j^{p,m} L_{\eta_j}^k \quad \forall j \in M_{act}^p \end{aligned} \quad (49)$$

de forma de obtener el estado actualizado del material para la iteración  $k$ :

$$A_{n+1}^k = A_n + \Delta A_{n+1}^k \quad (50)$$