

ICE 3680: Geomecánica computacional

Interfaces mecánicas

Esteban Sáez R.

17 de noviembre de 2010

1 Introducción

Un problema general de interacción dinámica suelo-estructura se puede representar generámicamente como se indica en la Fig. 1. La excitación sísmica se representa por medio del campo de desplazamientos $\underline{u}_i(\underline{x}, t)$. El sistema dinámico consiste en dos sub-dominios, la super-estructura Ω_b (y su contorno Γ_b) y el suelo (semi-espacio no acotado). Como es imposible cubrir el semi-espacio por medio de una discretización en elementos finitos, un borde artificial Γ_s debe ser introducido empleando alguna estrategia especial para representar la porción del suelo no considerada en el modelo. Dependiendo del tipo de condición impuesta, la ubicación del borde artificial será una función del amortiguamiento del suelo, del rango de frecuencias de interés, la velocidad de propagación de las ondas y de la duración de la excitación (?).

El dominio completo puede ser separado en dos sub-dominios: el suelo Ω_s (bi-fásico) y la superestructura Ω_b (mono-fásico). Ambos sub-dominios están separados por una interfaz Σ_{bs} . Los desplazamientos en Ω_s y Ω_b debidos a la carga dinámica se denotarán por $\underline{u}_s(\underline{x}, t)$ y $\underline{u}_b(\underline{x}, t)$ respectivamente. El problema mecánico consiste en determinar el campo de tensiones $\underline{\sigma}_s(\underline{u}_s)$ en el suelo y $\underline{\sigma}_b(\underline{u}_b)$ en la super-estructura que verifiquen las ecuaciones de conservación de la cantidad de movimiento y de conservación de masa (en el suelo).

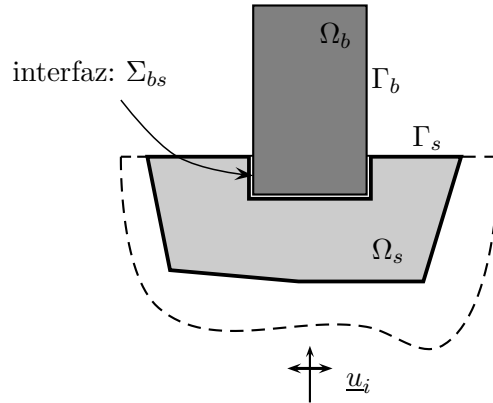


Figura 1: Definición del sistema global

Las condiciones de borde para el suelo Ω_s son más complejas que las correspondientes a la estructura Ω_b ya que deben incluir las condiciones de borde relativas a la fase sólida como a la fase fluida.

Para la super-estructura, se emplea típicamente una condición de tracciones aplicadas (superficie libre en dinámica):

$$\underline{t}_b(\underline{x}, t) = \underline{\sigma}_b \cdot \underline{n} = \underline{0} \quad \forall \underline{x} \in \Gamma_{b\sigma} = \Gamma_b \quad (1)$$

donde \underline{t}_b es el vector esfuerzo según la normal externa \underline{n} de Γ_b . En el caso de cálculos estáticos, esta condición de borde se puede modificar para incluir tracciones prescritas \underline{t}^* sobre una porción del dominio $\Gamma_{b\sigma}^*$ ($\Gamma_{b\sigma}^* \cap \Gamma_{b\sigma} = \emptyset$ y $\Gamma_{b\sigma}^* \cup \Gamma_{b\sigma} = \Gamma_b$):

$$\begin{aligned} \underline{t}_b(\underline{x}) &= \underline{0} \quad \forall \underline{x} \in \Gamma_{b\sigma} \\ \underline{t}_b(\underline{x}) &= \underline{t}^*(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in \Gamma_{b\sigma}^* \end{aligned} \quad (2)$$

Dada la naturaleza bi-fásica del suelo, la frontera Γ_s de Ω_s se debe particionar en dos. Primero, el borde mecánico: $\Gamma_{s\sigma}$ y Γ_{su} . En Γ_{su} se impone un desplazamiento mientras que una condición de tracción impuesta se debe considerar sobre $\Gamma_{s\sigma}$ ($\Gamma_{su} \cap \Gamma_{s\sigma} = \emptyset$ y $\Gamma_{su} \cup \Gamma_{s\sigma} = \Gamma_s$). Para las condiciones sobre la fase fluida, se emplea una segunda partición: Γ_{sp} y $\Gamma_{s\varphi}$ ($\Gamma_{sp} \cap \Gamma_{s\varphi} = \emptyset$ y $\Gamma_{sp} \cup \Gamma_{s\varphi} = \Gamma_s$). Sobre Γ_p existe una condición relativa a la presión de poros, mientras que a través de $\Gamma_{s\varphi}$ se emplea una condición de flujo:

$$\underline{u}_{r,f}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n} = \varphi^*(\underline{x}, t) \quad \forall \underline{x} \in \Gamma_{s\varphi} \quad (3)$$

donde \underline{n} es la normal exterior sobre $\Gamma_{s\varphi}$ y φ^* el valor prescrito del flujo.

Sobre la interfaz Σ_{bs} entre ambos dominios, la condición de fluido puede ser considerada como de flujo nulo:

$$(\underline{K} \cdot \underline{\text{grad}} p(\underline{x}, t)) \cdot \underline{n} = 0 \quad \forall \underline{x} \in \Sigma_{bs} \quad (4)$$

o bien como presión atmosférica. \underline{n} es la normal exterior a Ω_s sobre la interfaz Σ_{bs} . La continuidad del vector esfuerzo debe ser verificada sobre la interfaz (incluso si ocurre deslizamiento o apertura relativa):

$$\underline{t}_b(\underline{x}, t) + \underline{t}_s(\underline{x}, t) = \underline{0} \quad \forall \underline{x} \in \Sigma_{bs} \quad (5)$$

en donde \underline{t}_s es el vector esfuerzo aplicado sobre Γ_s . En relación a los desplazamientos, se permiten discontinuidades entre Ω_s y Ω_b sobre la interfaz Σ_{bs} . Si $[\cdot]$ representa el salto de una cantidad, el salto de desplazamientos entre la super-estructura y el suelo sobre la interfaz Σ_{bf} puede ser escrito como:

$$[\underline{u}(\underline{x}, t)] = \underline{u}_b(\underline{x}, t) - \underline{u}_s(\underline{x}, t) \quad \forall \underline{x} \in \Sigma_{bs} \quad (6)$$

Veremos en lo que sigue el tratamiento numérico de esta interfaz mecánica entre el suelo Ω_s y la super-estructura Ω_b .

2 Formulación teórica

El enfoque permite tomar en cuenta tanto las discontinuidades normales como tangenciales sobre la interfaz Σ_{bs} entre los dos dominios sólidos Ω_b y Ω_s . Se asume que ambos dominios están en contacto inicialmente y se trabajará en pequeñas deformaciones. Sea \underline{n} el vector normal orientado desde Ω_b hacia Ω_s . El salto de desplazamiento definido en (6) puede ser separado en una componente normal (apertura $[u_N]$) y un salto relativo tangencial (deslizamiento $[u_T]$):

$$\begin{aligned} [u_N] &= [\underline{u}] \cdot \underline{n} \\ [u_T] &= [\underline{u}] - [u_N] \underline{n} \end{aligned} \quad (7)$$

Si $\underline{\sigma}$ es el vector esfuerzo sobre Ω_s o Ω_b , el vector esfuerzo normal σ_N y tangencial $\underline{\sigma}_T$ sobre Σ_{bs} puede ser escrito como (Fig.2):

$$\begin{aligned} \sigma_N &= \underline{n} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{n} \\ \underline{\sigma}_T &= \underline{\sigma} \cdot \underline{n} - \sigma_N \underline{n} \end{aligned} \quad (8)$$

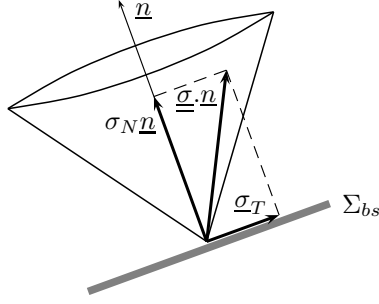


Figura 2: Descomposición del vector esfuerzo sobre la interfaz Σ_{bs}

De acuerdo al principio de acción y reacción, el vector esfuerzo debe ser continuo sobre la interfaz incluso si ocurre pérdida de contacto o deslizamiento durante la carga (5). Entonces, sólo las discontinuidades de desplazamiento se permiten. Asumiendo un modelo de comportamiento friccional de tipo Mohr-Coulomb, se deben satisfacer tres criterios distintos:

1. Criterio de no inter-penetración:

$$[u_N] \geq 0$$

2. Pérdida de contacto y superficie libre:

$$\text{If } [u_N] > e_{ini} \rightarrow \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} = \underline{\underline{0}}$$

donde e_{ini} es el espesor inicial de la interfaz.

3. Criterio de contacto/compresión:

$$\text{If } [u_N] \leq e_{ini} \rightarrow \sigma_N \leq 0 \quad \text{and} \quad |\underline{\underline{\sigma}}_T| \leq |\sigma_N| \tan \phi + c$$

donde ϕ es el ángulo de fricción de la interfaz

- No hay deslizamiento:

$$\text{If } |\underline{\underline{\sigma}}_T| \leq |\sigma_N| \tan \phi + c \rightarrow [\underline{\underline{u}}_T] = \underline{\underline{0}}$$

- Ocurre deslizamiento:

$$\text{If } |\underline{\underline{\sigma}}_T| = |\sigma_N| \tan \phi + c \rightarrow [\underline{\underline{u}}_T] = \dot{\lambda}^p \frac{\underline{\underline{\sigma}}_T}{|\underline{\underline{\sigma}}_T|} \quad \text{with} \quad \dot{\lambda}^p \geq 0$$

donde $\dot{\lambda}^p$ es el multiplicador plástico c es la cohesión de la interfaz.

En las expresiones anteriores $|\cdot|$ representa el valor absoluto de los escalares o el módulo en el caso de vectores. La condición $\dot{\lambda}^p \geq 0$ significa que si ocurre deslizamiento, este debe seguir la dirección del vector esfuerzo tangente. Los criterios anteriores se resumen en la Fig. 3a en términos de los saltos de desplazamiento y esfuerzo. La unicidad no se satisface en dicha formulación, por lo tanto desde un punto de vista numérico conviene regularizar las expresiones anteriores. Esta regularización puede ser efectuada introduciendo una formulación elasto-plástica para las relaciones entre los saltos de esfuerzos y desplazamientos sobre la interfaz.

Las relaciones esfuerzo-desplazamiento pueden ser regularizadas introduciendo unos parámetros de penalización E y G asociados a la rigidez elástica de la interfaz en un sentido normal y tangencial (Fig.3b). De acuerdo a las hipótesis generales de los modelos elasto-plásticos, el incremento del salto normal y tangencial total puede ser separado en una contribución elástica y una plástica:

$$\begin{aligned} [\underline{\underline{u}}_T] &= [\underline{\underline{u}}_T^e] + [\underline{\underline{u}}_T^p] \\ [\underline{\underline{u}}_N] &= [\underline{\underline{u}}_N^e] + [\underline{\underline{u}}_N^p] \end{aligned} \quad (9)$$

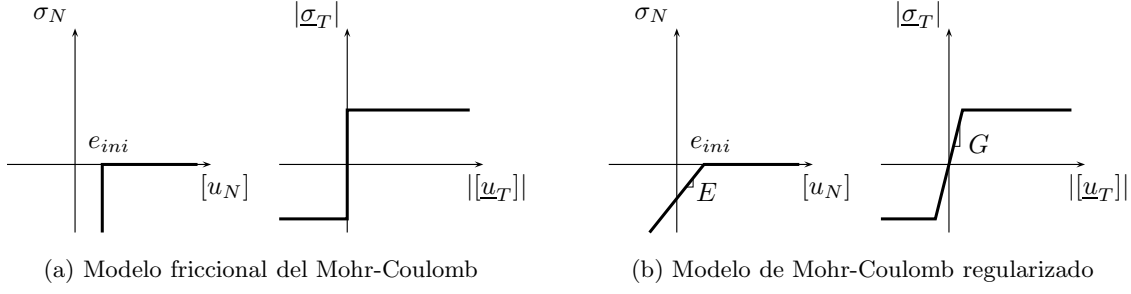


Figura 3: Representaciones gráficas de los modelos de comportamiento de la interfaz

donde el super-índice e y p denotan la parte elástica y plástica, respectivamente. La evolución del vector esfuerzo está asociada unicamente al incremento elástico:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{\sigma}}_T &= G [\dot{\underline{u}}_T^e] \\ \dot{\sigma}_N &= E [\dot{u}_N^e]\end{aligned}\quad (10)$$

El tercer criterio se re-escibe ahora en términos de salto tangencial plástico:

- No hay deslizamiento plástico:

$$\text{If } |\underline{\sigma}_T| < |\sigma_N| \tan \phi + c \rightarrow [\dot{\underline{u}}_T^p] = \underline{0} \text{ and } [\dot{u}_N^p] = 0$$

- Deslizamiento plástico:

$$\text{If } |\underline{\sigma}_T| = |\sigma_N| \tan \phi + c \rightarrow \exists \dot{\lambda}^p \geq 0 \text{ t.q.}$$

$$\begin{aligned}[\dot{\underline{u}}_T^p] &= \dot{\lambda}^p \frac{\underline{\sigma}_T}{|\underline{\sigma}_T|} \\ [\dot{u}_N^p] &= \dot{\lambda}^p \tan \psi\end{aligned}$$

donde ψ es el ángulo de dilatación de la interfaz, que relaciona el desprendimiento plástico normal con el deslizamiento plástico. Si se selecciona un valor nulo para ψ , la dilatación desaparece y la formulación es equivalente a un modelo friccional puro de Mohr-Coulomb. Si $\phi = \psi$, el modelo elasto-plástico es asociado.

El cálculo del multiplicador plástico $\dot{\lambda}^p$ puede ser efectuado mediante la ecuación de compatibilidad obtenida a partir de la superficie de fluencia asociada al límite de fricción:

$$\frac{1}{|\underline{\sigma}_T|} (\underline{\sigma}_T \cdot \dot{\underline{\sigma}}_T) + \dot{\sigma}_N \tan \phi = 0 \quad (11)$$

Reemplazando las relaciones de salto-esfuerzo (10), las expresiones anteriores resultan:

$$\frac{G}{|\underline{\sigma}_T|} (\underline{\sigma}_T \cdot [\dot{\underline{u}}_T^e]) + E [\dot{u}_N^e] \tan \phi = 0 \quad (12)$$

Entonces, el multiplicador plástico puede ser calculado como:

$$\dot{\lambda}^p = \frac{\frac{G}{|\underline{\sigma}_T|} (\underline{\sigma}_T \cdot [\dot{\underline{u}}_T^e]) + E [\dot{u}_N^e] \tan \phi}{G + E \tan \phi \tan \psi} \quad (13)$$

Finalmente, el incremento total de esfuerzo en la interfaz está dado por:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{\sigma}}_T &= G [\dot{\underline{u}}_T^e] - \dot{\lambda}^p G \frac{\underline{\sigma}_T}{|\underline{\sigma}_T|} \\ \dot{\sigma}_N &= E [\dot{u}_N^e] - \dot{\lambda}^p E \tan \psi\end{aligned}\quad (14)$$

3 Integración numérica

El esquema de integración presentado en esta sección es de tipo explícita. Durante un paso de carga $n + 1$, el incremento total del salto de desplazamiento se divide en dos parte: la primera es elástica hasta alcanzar el límite de elasticidad, y la segunda parte corresponde al incremento plástico. Para una iteración $k + 1$ del paso de carga n , el incremento del salto puede ser escrito como:

$$\begin{aligned} [\dot{\underline{u}}_T] &= \frac{1}{\Delta t} [\underline{u}_{T_{n+1}}^{k+1} - \underline{u}_{T_n}] = \frac{1}{\Delta t} [\Delta \underline{u}_T] \\ [\dot{u}_N] &= \frac{1}{\Delta t} [u_{N_{n+1}}^{k+1} - u_{N_n}] = \frac{1}{\Delta t} [\Delta u_N] \end{aligned} \quad (15)$$

donde el incremento de tiempo Δt se asume constante durante el análisis. Luego, el incremento se divide en dos parte: $\gamma \Delta t$ y $(1 - \gamma) \Delta t$. La primera corresponde a la parte elástica y la segunda a la plástica. El valor de γ se calcula según:

$$f(\underline{\sigma}_{T_n} + \gamma \Delta \underline{\sigma}_T, \sigma_{N_n} + \gamma \Delta \sigma_N) \leq 0 \quad (16)$$

donde:

$$\begin{aligned} f(\underline{\sigma}_T, \sigma_N) &= |\underline{\sigma}_T| - |\sigma_N| \tan \phi \\ \Delta \underline{\sigma}_T &= G [\Delta \underline{u}_T] \\ \Delta \sigma_N &= E [\Delta u_N] \end{aligned}$$

Con γ , la parte elástica del incremento se conoce. A continuación, el multiplicador plástico λ^p se calcula con (13) empleando la parte plástica del incremento:

$$\begin{aligned} [\Delta \underline{u}_T]^* &= (1 - \gamma) [\Delta \underline{u}_T] \\ [\Delta u_N]^* &= (1 - \gamma) [\Delta u_N] \end{aligned} \quad (17)$$

para un estado de tensiones:

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}_T^* &= \underline{\sigma}_{T_n} + \gamma \Delta \underline{\sigma}_T \\ \sigma_N^* &= \sigma_{N_n} + \gamma \Delta \sigma_N \end{aligned} \quad (18)$$

Luego de la evaluación del multiplicador plástico, el incremento de esfuerzo se puede escribir en forma matricial como:

$$\begin{Bmatrix} \Delta \underline{\sigma}_T \\ \Delta \sigma_N \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G - \frac{(1-\gamma)G^2}{H} & -\frac{(1-\gamma)EG \tan \phi}{H} \\ -\frac{(1-\gamma)EG \tan \phi}{H} & E - \frac{(1-\gamma)E^2 \tan \phi \tan \psi}{H} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} [\Delta \underline{u}_T]^* \\ [\Delta u_N]^* \end{Bmatrix} \quad (19)$$

donde $H = G + E \tan \phi \tan \psi$. Finalmente, el tensor de esfuerzos en la interfaz para la iteración $k + 1$ del paso de carga $n + 1$ es obtenido mediante:

$$\underline{\sigma}_{T_{n+1}}^{k+1} = \underline{\sigma}_{T_n} + \Delta \underline{\sigma}_T \quad (20)$$

$$\sigma_{N_{n+1}}^{k+1} = \sigma_{N_n} + \Delta \sigma_N \quad (21)$$

Los parámetros que describen el modelo de la interfaz mecánica se resumen en la Table 1.

Tabla 1: Parámetros del modelos de interfaz tipo Mohr-Coulomb

Parameter	Description
E	módulo de rigidez normal
G	módulo de rigidez tangente
ϕ	ángulo de fricción
ψ	ángulo de dilatancia
e_{ini}	espesor de la interfaz
c	cohesión de la interfaz