

ICE 3680: Geomecánica computacional

Aproximación paraxial

Esteban Sáez R.

17 de noviembre de 2010

1 Introducción

La incorporación de un movimiento sísmico para un estructura sobre base rígida se suele efectuar mediante la prescripción un desplazamiento basal $u_g(t)$ o bien de una aceleración basal $\ddot{u}_g(t)$. En dicho caso, el problema se plantea en términos de los desplazamientos relativos con respecto al movimiento basal. Sin embargo, en problemas geotécnicos este enfoque de movimiento homogéneo no es razonable dadas las dimensiones usuales de los problema. Por lo tanto, se prefiere emplear un enfoque en desplazamientos totales, imponiendo el movimiento sísmico por medio de un campo incidente sobre una parte del contorno.

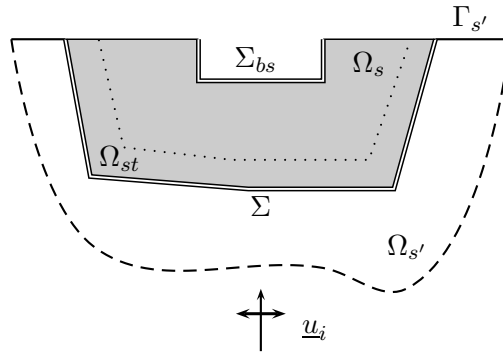


Figura 1: Domain decomposition for dynamic boundary conditions

Si el problema se trata por medio de elementos finitos inelásticos, se suele truncar una porción del suelo en torno a la obra de interés (edificio, presa, etc.) En dicho situación, el procedimiento de movimiento relativo con respecto a una base fija no es estrictamente aplicable salvo situaciones excepcionales: roca rígida adyacente al borde del modelo, modelación de experiencias en tablas vibrantes, etc. En efecto, sobre el borde truncado se debe permitir tanto el ingreso del campo incidente como la salida del campo reflejado.

Para modelar en forma adecuada el borde absorbente/incidente, el dominio no acotado del suelo puede ser dividido en dos sub-dominios disjuntos Ω_s y $\Omega_{s'}$ (Fig. 1). En general, el dominio Ω_s es inelástico y bifásico, y obedece por lo tanto las ecuaciones dinámicas de un medio poroso. El dominio $\Omega_{s'}$ se supondrá elástico, homogéneo, isotrópico, monofásico y no-acotado. Modelaremos el comportamiento de éste último por medio de una aproximación de tipo paraxial de las ecuaciones de la elastodinámica (Modaresi, 1987; Engquist and Majda, 1977). Si el campo de desplazamientos en $\Omega_{s'}$ se denota por $\underline{u}_{s'}$, las ecuaciones de la elastodinámica en el dominio temporal pueden ser escritas mediante:

$$(\lambda + \mu) \underline{\text{grad}}(\text{div} \underline{u}_{s'}) + \mu \Delta \underline{u}_{s'} = \rho_{s'} \ddot{\underline{u}}_{s'} \quad \forall \underline{x} \in \Omega_{s'} \quad (1)$$

donde λ y μ son las constantes de Lamé y $\rho_{s'}$ la densidad de masa del medio. Supondremos condiciones de campo libre sobre el borde $\Gamma_{s'}$ de $\Omega_{s'}$. El campo de desplazamientos $\underline{u}_{s'}$ debe tender al campo incidente \underline{u}_i suficientemente lejos de la interfaz Σ entre Ω_s y $\Omega_{s'}$:

$$\lim_{\|\underline{x}\| \rightarrow \infty} \underline{u}_{s'} = \underline{u}_i \quad (2)$$

El tensor de esfuerzos en $\Omega_{s'}$ puede ser separado en una parte estática $\underline{\underline{\sigma}}_{s'}^0$ debido a las fuerzas de gravedad y a las cargas estáticas, y en una parte dinámica originada por el campo de desplazamientos $\underline{u}_{s'}$:

$$\underline{\underline{\sigma}}_{s'} = \underline{\underline{\sigma}}_{s'}^0 + \underline{\underline{\sigma}}_{s'}(\underline{u}_{s'}) \quad (3)$$

Sobre la interfaz Σ , se debe verificar la continuidad de desplazamientos así como la del vector esfuerzo:

$$\underline{u}_{s'} = \underline{u}_s \quad \text{and} \quad \underline{t}_s + \underline{t}_{s'}(\underline{u}_{s'}) = \underline{0} \quad (4)$$

Asumiremos que existe una porción de transición monofásica del suelo Ω_{st} entre Σ y Ω_s (Fig. 1). Esta porción deberá satisfacer las ecuaciones de la elastodinámica. Finalmente, las condiciones iniciales sobre el dominio no-acotado $\Omega_{s'}$ son:

$$\begin{aligned} \underline{u}_{s'}(0) &= \underline{0} \\ \underline{\underline{\sigma}}_{s'}(0) &= \underline{\underline{\sigma}}_{s'}^0 \\ \underline{\dot{u}}_{s'}(0) &= \underline{0} \end{aligned} \quad (5)$$

Existen muchas proposiciones relativas a fronteras absorbentes para problemas de propagación de ondas en general. En el dominio temporal, una de las soluciones más simples consiste en emplear amortiguadores. Lamentablemente, la calidad de la aproximación decae rápidamente en la medida que el campo reflejado desde el modelo no está perfectamente alineado con la orientación del amortiguador. Adicionalmente, se debe ser capaz de separar el campo incidente del reflejado en problemas sísmicos (Zienkiewicz et al., 1988). La aproximación paraxial (Engquist and Majda, 1977), permite desarrollar una expresión para la impedancia dinámica en tiempo (y eventualmente en espacio) sobre la interfaz Σ . Este tipo de aproximación puede ser fácilmente extendida para ser usada simultáneamente como borde absorbente así como una herramienta para imponer un campo incidente (Modaresi, 1987). Los elementos esenciales de la implementación disponible en *GEFDyn* se describen a continuación.

2 Descomposición sobre un plano tangente a Σ

Con el fin de establecer una aproximación paraxial sobre el borde Σ (Fig.1), el desplazamiento \underline{u}_s se descompone en un sistema local de coordenadas $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ sobre un plano tangente a Σ (Fig. 2a):

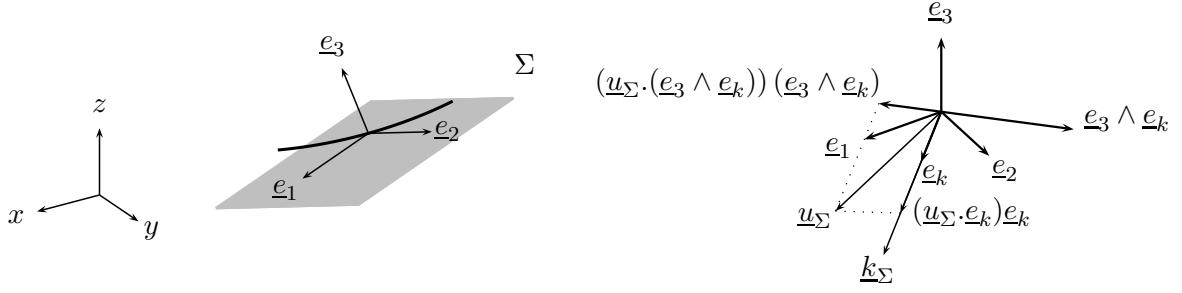
$$\underline{u}_s = \underline{u}_{s'} = u_1 \underline{e}_1 + u_2 \underline{e}_2 + u_3 \underline{e}_3 \quad (6)$$

Empleando esta descomposición local, la ecuación de la elastodinámica (1) puede ser escrita como:

$$\begin{aligned} (c_p^2 - c_s^2) (\partial_{11} u_1 + \partial_{12} u_2 + \partial_{13} u_3) + c_s^2 (\partial_{11} u_1 + \partial_{22} u_1 + \partial_{33} u_3) - \partial_{tt} u_1 &= 0 \\ (c_p^2 - c_s^2) (\partial_{12} u_1 + \partial_{22} u_2 + \partial_{23} u_3) + c_s^2 (\partial_{11} u_2 + \partial_{22} u_2 + \partial_{33} u_2) - \partial_{tt} u_2 &= 0 \\ (c_p^2 - c_s^2) (\partial_{13} u_1 + \partial_{23} u_2 + \partial_{33} u_3) + c_s^2 (\partial_{11} u_3 + \partial_{22} u_3 + \partial_{33} u_3) - \partial_{tt} u_3 &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

donde los coeficientes de Lamé han sido reemplazado por las velocidades de propagación de las ondas P y S $c_p = \sqrt{\frac{\lambda + \mu}{\rho}}$ y $c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$. Tomando la transformada de Fourier definida por:

$$\hat{u} = F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-i(k_1 x_1 + k_2 x_2 + \omega t)} dt \quad (8)$$

(a) Descomposición local de los desplazamientos sobre un plano tangente al borde Σ (b) Definición de un sistema local de coordenadas para descomponer el desplazamiento tangente en la base $(\underline{e}_k, \underline{e}_3 \wedge \underline{e}_k, \underline{e}_3)$ Figura 2: Descomposición local sobre un plano tangente al borde Σ

la ecuación (7) en el dominio de las frecuencias puede ser re-escrita como:

$$\begin{aligned}
(c_p^2 - c_s^2) (-k_1^2 \hat{u}_1 - k_1 k_2 \hat{u}_2 + i k_1 \partial_3 \hat{u}_3) + c_s^2 (-k_1^2 \hat{u}_1 - k_2^2 \hat{u}_1 + i k_2 \partial_3 \hat{u}_3) + \omega^2 \hat{u}_1 &= 0 \\
(c_p^2 - c_s^2) (-k_1 k_2 \hat{u}_1 - k_2^2 \hat{u}_2 + i k_2 \partial_3 \hat{u}_3) + c_s^2 (-k_1^2 \hat{u}_2 - k_2^2 \hat{u}_2 + \partial_{33} \hat{u}_2) + \omega^2 \hat{u}_2 &= 0 \\
(c_p^2 - c_s^2) (i k_1 \partial_3 \hat{u}_1 + i k_2 \partial_3 \hat{u}_2 + \partial_{33} \hat{u}_3) + c_s^2 (-k_1^2 \hat{u}_3 - k_2^2 \hat{u}_3 + \partial_{33} \hat{u}_3) + \omega^2 \hat{u}_3 &= 0 \quad (9)
\end{aligned}$$

3 Descomposición P, SV y SH

Si el vector \underline{u}_Σ representa al movimiento tangencial:

$$\underline{u}_\Sigma = u_1 \underline{e}_1 + u_2 \underline{e}_2 \quad \text{and} \quad \underline{k}_\Sigma = k_1 \underline{e}_1 + k_2 \underline{e}_2 \quad (10)$$

una forma equivalente a (9) es:

$$\begin{aligned}
(c_p^2 - c_s^2) (-\underline{k}_\Sigma \cdot \hat{\underline{u}}_\Sigma + i \partial_3 \hat{u}_3) \cdot \underline{k}_\Sigma + c_s^2 (-|\underline{k}_\Sigma|^2 + \partial_{33}) \hat{\underline{u}}_\Sigma + \omega^2 \hat{\underline{u}}_\Sigma &= \underline{0} \\
(c_p^2 - c_s^2) (i \underline{k}_\Sigma \cdot \partial_3 \hat{\underline{u}}_\Sigma + \partial_{33} \hat{u}_3) + c_s^2 (-|\underline{k}_\Sigma|^2 + \partial_{33}) \hat{u}_3 + \omega^2 \hat{u}_3 &= 0 \quad (11)
\end{aligned}$$

Las ecuaciones anteriores forman un sistema lineal para \hat{u}_3 que puede ser resuelto directamente por diagonalización empleando un cambio de variables apropiado. Por ejemplo, empleando la descomposición estándar del desplazamiento tangente \underline{u}_Σ en ondas P, SV y SH (Fig.2b):

$$\begin{aligned}
\underline{u}_\Sigma &= (\underline{u}_\Sigma \cdot \underline{e}_k) \underline{e}_k + (\underline{u}_\Sigma \cdot (\underline{e}_3 \wedge \underline{e}_k)) (\underline{e}_3 \wedge \underline{e}_k) \\
&= \left(\frac{\underline{u}_\Sigma \cdot \underline{k}_\Sigma}{|\underline{k}_\Sigma|} \right) \frac{\underline{k}_\Sigma}{|\underline{k}_\Sigma|} + \left(\frac{\underline{u}_\Sigma \cdot (\underline{e}_3 \wedge \underline{k}_\Sigma)}{|\underline{k}_\Sigma|} \right) \frac{\underline{e}_3 \wedge \underline{k}_\Sigma}{|\underline{k}_\Sigma|} \\
&= u_1^{PSV} \underline{e}_k + u_2^{SH} (\underline{e}_3 \wedge \underline{e}_k) \quad (12)
\end{aligned}$$

donde $\underline{k}_\Sigma = |\underline{k}_\Sigma| \underline{e}_k$. Reemplazando la descomposición para el desplazamiento tangente en (11), y luego de ciertas simplificaciones se obtiene:

$$\begin{aligned}
((\omega^2 - c_s^2 |\underline{k}_\Sigma|^2 + c_p^2 \partial_{33}) \hat{u}_1^{PSV} + i |\underline{k}_\Sigma| (c_p^2 - c_s^2) \partial_3 \hat{u}_3^{PSV}) \underline{e}_k + \\
\underbrace{(c_s^2 (-|\underline{k}_\Sigma|^2 + \partial_{33}) \hat{u}_2^{SH} + \omega^2 \hat{u}_2^{SH})}_{\text{SH component}} (\underline{e}_3 \wedge \underline{e}_k) &= 0 \quad (13)
\end{aligned}$$

$$\left((\omega^2 - c_p^2 |\underline{k}_\Sigma|^2 + c_s^2 \partial_{33}) \hat{u}_3^{PSV} + i |\underline{k}_\Sigma| (c_p^2 - c_s^2) \partial_3 \hat{u}_1^{PSV} \right) \underline{e}_3 = 0 \quad (14)$$

Los vectores \underline{e}_k y $\underline{e}_3 \wedge \underline{e}_k$ son ortogonales, entonces la ecuación (13) es equivalente a dos ecuaciones. El término destacado en (13) corresponde a la componente SH y puede ser despejada en forma explícita:

$$\partial_{33}\hat{u}_2^{SH} = -\left(\frac{\omega^2}{c_s^2} - |\underline{k}_\Sigma|^2\right)\hat{u}_2^{SH} \quad (15)$$

Las expresiones para las componentes P y SV forman un sistema acoplado:

$$\begin{aligned} \partial_{33}\hat{u}_1^{PSV} &= \frac{c_p^2 |\underline{k}_\Sigma|^2 - \omega^2}{c_s^2} \hat{u}_1^{PSV} - i|\underline{k}_\Sigma| (c_p^2 - c_s^2) \partial_3 \hat{u}_3^{PSV} \\ \partial_{33}\hat{u}_3^{PSV} &= \frac{c_s^2 |\underline{k}_\Sigma|^2 - \omega^2}{c_s^2} \hat{u}_3^{PSV} - i|\underline{k}_\Sigma| (c_p^2 - c_s^2) \partial_3 \hat{u}_1^{PSV} \end{aligned} \quad (16)$$

Empleando la notación siguiente:

$$\xi_p^2 = \frac{\omega^2}{c_p^2} - |\underline{k}_\Sigma|^2 \quad \text{and} \quad \xi_s^2 = \frac{\omega^2}{c_s^2} - |\underline{k}_\Sigma|^2 \quad (17)$$

las ecuaciones anteriores pueden ser escritas como:

$$\begin{aligned} \partial_{33}\hat{u}_2^{SH} &= 0 \\ \partial_{33}\hat{u}_1^{PSV} &= -\frac{c_p^2}{c_s^2} \xi_p^2 \hat{u}_1^{PSV} - i \frac{|\underline{k}_\Sigma| (c_p^2 - c_s^2)}{c_s^2} \partial_3 \hat{u}_3^{PSV} \\ \partial_{33}\hat{u}_3^{PSV} &= -\frac{c_s^2}{c_p^2} \xi_s^2 \hat{u}_3^{PSV} - i \frac{|\underline{k}_\Sigma| (c_p^2 - c_s^2)}{c_p^2} \partial_3 \hat{u}_1^{PSV} \end{aligned} \quad (18)$$

La solución del sistema diferencial anterior puede ser efectuada reemplazando funciones de prueba de la forma $u_i = e^{\lambda x_i}$. Este reemplazo conduce a un polinomio característico en términos de λ . Como estamos interesados sólo en la solución que se propaga hacia abajo (ondas emitidas que se propagan según $-\underline{e}_3$), sólo las soluciones de $Im(\lambda) < 0$ son aceptables. Imponiendo estas condiciones, la solución para las componentes del desplazamiento son:

$$\begin{aligned} \hat{u}_1^{PSV} &= A_P e^{-i\xi_p x_3} + A_{SV} e^{-i\xi_s x_3} \\ \hat{u}_2^{SH} &= A_{SH} e^{-i\xi_s x_3} \\ \hat{u}_3^{PSV} &= -\frac{\xi_p}{|\underline{k}_\Sigma|} A_P e^{-i\xi_p x_3} + \frac{|\underline{k}_\Sigma|}{\xi_s} A_{SV} e^{-i\xi_s x_3} \end{aligned} \quad (19)$$

Para obtener las constantes A_P , A_{SH} y A_{SV} supondremos conocido el desplazamiento $\underline{u}_s(x_3 = 0)$ sobre el borde Σ . Evaluando el sistema (19) para $x_3 = 0$, e imponiendo los valores de los desplazamientos conocidos $\hat{u}_2^{SH}(x_3 = 0)$, $\hat{u}_1^{PSV}(x_3 = 0)$ y $\hat{u}_3^{PSV}(x_3 = 0)$, se obtiene:

$$\begin{aligned} A_{SH} &= \hat{u}_{2_0}^{SH} \\ A_P &= \frac{|\underline{k}_\Sigma|^2}{\xi_p \xi_s + |\underline{k}_\Sigma|^2} \hat{u}_{1_0}^{PSV} - \frac{\xi_s |\underline{k}_\Sigma|}{\xi_p \xi_s |\underline{k}_\Sigma|^2} \hat{u}_{3_0}^{PSV} \\ A_{SV} &= \frac{\xi_p \xi_s}{\xi_p \xi_s + |\underline{k}_\Sigma|^2} \hat{u}_{1_0}^{PSV} + \frac{\xi_s |\underline{k}_\Sigma|}{\xi_p \xi_s + |\underline{k}_\Sigma|^2} \hat{u}_{3_0}^{PSV} \end{aligned} \quad (20)$$

4 Aproximación espectral de la impedancia

Para construir la impedancia sobre el borde Σ , se requiere evaluar el vector esfuerzo $\underline{t}(\underline{x}, t)$ aplicado en el plano perpendicular a \underline{e}_3 . Como se supone que el dominio $\Omega_{s'}$ (y Ω_{st}) es elástico:

$$\underline{t}(\underline{x}, t) = (\lambda \operatorname{div}(\underline{u}_{s'}) \underline{I} + 2\mu \underline{\underline{e}}) \cdot \underline{e}_3 \quad \forall \underline{x} \in \Sigma \quad (21)$$

La expresión correspondiente en el dominio de las frecuencias es:

$$\begin{aligned} \hat{\underline{t}}(\underline{x}, \omega) &= \rho c_s^2 (\partial_3 \hat{u}_1 + ik_1 \hat{u}_3) \underline{e}_1 + \rho c_s^2 (\partial_3 \hat{u}_2 + ik_2 \hat{u}_3) \underline{e}_2 \\ &\quad + \rho c_p^2 (\partial_3 \hat{u}_3 \rho (c_p^2 - 2c_s^2) (ik_1 \hat{u}_1 + ik_2 \hat{u}_2)) \underline{e}_3 \\ &= \rho c_s^2 (\partial_3 \hat{\underline{u}}_\Sigma + i \hat{u}_3 \underline{k}_\Sigma) + (i\rho (c_p^2 - 2c_s^2) \underline{k}_\Sigma \cdot \hat{\underline{u}}_\Sigma + \rho c_p^2 \partial_3 \hat{u}_3) \underline{e}_3 \quad \forall \underline{x} \in \Sigma \end{aligned} \quad (22)$$

Las expresiones anteriores pueden ser re-escritas en términos de la descomposición en ondas P, SV y SH:

$$\begin{aligned} \hat{\underline{t}}(\underline{x}, \omega) &= \rho c_s^2 (\partial_3 \hat{u}_1^{PSV} + i \hat{u}_3^{PSV} |\underline{k}_\Sigma|) \underline{e}_k + \rho c_s^2 \partial_3 \hat{u}_2^{SH} (\underline{e}_3 \wedge \underline{e}_k) \\ &\quad + (i\rho (c_p^2 - 2c_s^2) |\underline{k}_\Sigma| \hat{u}_1^{PSV} + \rho c_s^2 \partial_3 \hat{u}_3^{PSV}) \underline{e}_3 \end{aligned} \quad (23)$$

Empleando las expresiones para el desplazamiento obtenidas previamente (19), se puede calcular directamente las derivadas parciales y reemplazarlas en (23):

$$\begin{aligned} \hat{\underline{t}}(\underline{x}, \omega) &= \frac{i\rho}{\xi_p \xi_s + |\underline{k}_\Sigma|^2} \left(-\xi_p \omega^2 \hat{u}_{10}^{PSV} + c_s^2 |\underline{k}_\Sigma| \left(|\underline{k}_\Sigma|^2 + 2\xi_p \xi_s - \xi_s^2 \right) \hat{u}_{30}^{PSV} \right) \underline{e}_k \\ &\quad - i\rho c_s^2 \xi_s \hat{u}_{20}^{SH} (\underline{e}_3 \wedge \underline{e}_k) + \frac{i\rho}{\xi_p \xi_s + |\underline{k}_\Sigma|^2} \left(|\underline{k}_\Sigma| \left(\omega^2 - 2c_s^2 (\xi_p \xi_s + |\underline{k}_\Sigma|^2) \right) \right) \hat{u}_{10}^{PSV} - \xi_s \omega^2 \hat{u}_{30}^{PSV} \underline{e}_3 \end{aligned} \quad (24)$$

Las expresiones anteriores pueden ser escritas en términos de un operador lineal sobre los desplazamientos en el contorno:

$$\hat{\underline{t}}(\underline{x}, \omega) = \underline{\underline{A}}(|\underline{k}_\Sigma|, \omega) \cdot \hat{\underline{u}}_0(\underline{k}_\Sigma, \omega) \quad (25)$$

donde $\underline{\underline{A}}(|\underline{k}_\Sigma|, \omega)$ es el operador global de la impedancia. Empleando transformada de Fourier inversa, la expresión correspondiente en el dominio del tiempo es:

$$\underline{t}(\underline{x}, t) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{\underline{A}}(|\underline{k}_\Sigma|, \omega) \hat{\underline{u}}_0(\underline{k}_\Sigma, \omega) e^{i(\underline{k}_\Sigma \cdot \underline{x}_\Sigma + \omega t)} d\underline{k}_\Sigma d\omega \quad (26)$$

La expresión (26) representa la acción espectral impuesta por las ondas emitidas que se propagan en la dirección $-\underline{e}_3$ a partir del borde Σ . Esta acción es no-local ya que depende de los desplazamientos $\hat{\underline{u}}_0(\underline{k}_\Sigma, \omega)$, entonces de la transformada de Fourier de $\underline{u}(\underline{x}_\Sigma, t)$ sobre el tiempo t y en el espacio \underline{x}_Σ . Para obtener una aproximación local de la impedancia Engquist and Majda (1977) propuso desarrollar las variables ξ_p y ξ_s como una serie de $\frac{|\underline{k}_\Sigma|}{\xi}$. Por ejemplo empleando un desarrollo de Taylor para ξ_p :

$$\xi_p = \frac{\omega}{c_p} \sqrt{1 - \frac{c_p^2}{\omega^2} |\underline{k}_\Sigma|^2} = \frac{\omega}{c_p} \left(1 - \left(\frac{c_p}{\omega} |\underline{k}_\Sigma| \right)^2 \frac{1}{2} + \dots \right) \quad (27)$$

Entonces, la aproximación de orden cero y de primer orden están dadas por:

$$\text{Aproximación de orden cero} : \xi_p = \frac{\omega}{c_p} + \mathcal{O}\left(\frac{c_p^2 |k_\Sigma|^2}{\omega^2}\right) \quad (28)$$

$$\text{Aproximación de primer orden} : \xi_p = \frac{\omega}{c_p} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{c_p^2}{\omega^2} |k_\Sigma|^2\right) + \mathcal{O}\left(\frac{c_p^4 |k_\Sigma|^4}{\omega^4}\right) \quad (29)$$

La aproximación de orden cero es la solución estándar para el problema de propagación de ondas unidimensional y puede también ser obtenido a partir de consideraciones físicas (Wolf, 1985; Wolf and Song, 1996). Para el caso tridimensional, la aproximación de orden cero es precisa para valores de frecuencia altos y para ondas de incidencia aproximadamente normal al borde Σ (k_Σ pequeño). Se obtienen algunos problemas de estabilidad numérica para órdenes mayores (Engquist and Majda, 1977). Un desarrollo en series de Padé permite resolver parcialmente el problema (Clayton and Engquist, 1977), en dicho caso las series siguen las expresiones recursivas:

$$\xi_p^j = \frac{\omega}{c_p} \left(1 - \frac{\left(\frac{c_p |k_\Sigma|}{\omega}\right)^2}{1 + \frac{c_p}{\omega} \xi_p^{j-1}} + \dots\right) \quad \text{with} \quad \xi_p^1 = \frac{\omega}{c_p} \quad (30)$$

Para desarrollar una aproximación paraxial para la impedancia espectral sobre el borde Σ , los desarrollos para ξ_p y ξ_s pueden ser reemplazados en (24). Luego de algunas simplificaciones, se obtiene para el desarrollo de orden cero $|k_\Sigma|$:

$$\hat{\underline{t}}(\underline{x}, \omega) = -i\rho c_s \omega (\hat{u}_{1_0}^{PSV} \underline{e}_k + \hat{u}_{2_0}^{SH} (\underline{e}_3 \wedge \underline{e}_k)) - i\rho c_p \omega \hat{u}_{3_0}^{PSV} \underline{e}_3 \quad \forall \underline{x} \in \Sigma \quad (31)$$

En el sistema de referencia local sobre el borde $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$, las expresiones previas se transforman en:

$$\hat{\underline{t}}(\underline{x}, \omega) = -i\rho c_s \omega \hat{u}_{1_0} \underline{e}_1 - i\rho c_s \omega \hat{u}_{2_0} \underline{e}_2 - i\rho c_p \omega \hat{u}_{3_0} \underline{e}_3 \quad \forall \underline{x} \in \Sigma \quad (32)$$

Tomando la transformada de Fourier inversa, la expresión correspondiente el dominio del tiempo es:

$$\underline{t}(\underline{x}, t) = -\rho c_s \dot{u}_{1_0} \underline{e}_1 - \rho c_s \dot{u}_{2_0} \underline{e}_2 - \rho c_p \dot{u}_{3_0} \underline{e}_3 \quad \forall \underline{x} \in \Sigma \quad (33)$$

Si se emplea un desarrollo $|k_\Sigma|$ de primer orden, el vector esfuerzo correspondiente en el dominio de las frecuencias puede ser escrito como:

$$\begin{aligned} \hat{\underline{t}}(\underline{x}, t) = & (-i\rho c_s \omega \hat{u}_{1_0} + i\rho c_s (2c_s - c_p) \hat{u}_{3_0} k_1) \underline{e}_1 + (-i\rho c_s \omega \hat{u}_{2_0} + i\rho c_s (2c_s - c_p) \hat{u}_{3_0} k_2) \underline{e}_2 \\ & + (-i\rho c_p \omega \hat{u}_{3_0} - i\rho c_s (2c_s - c_p) (\hat{u}_{1_0} k_1 + \hat{u}_{2_0} k_2)) \underline{e}_3 \quad \forall \underline{x} \in \Sigma \end{aligned} \quad (34)$$

La expresión correspondiente en el dominio del tiempo queda:

$$\begin{aligned} \underline{t}(\underline{x}, t) = & (-\rho c_s \dot{u}_{1_0} + \rho c_s (2c_s - c_p) \partial_1 u_{3_0}) \underline{e}_1 + (-\rho c_s \dot{u}_{2_0} + \rho c_s (2c_s - c_p) \partial_2 u_{3_0}) \underline{e}_2 \\ & (-\rho c_p \dot{u}_{3_0} - \rho c_s (2c_s - c_p) (\partial_1 u_{1_0} + \partial_2 u_{2_0})) \underline{e}_3 \quad \forall \underline{x} \in \Sigma \end{aligned} \quad (35)$$

Se puede observar que las expresiones anteriores se emplea sólo el primer término del desarrollo (27) para ξ_p y ξ_s . En la última expresión, las derivadas espaciales tienden a generar inestabilidades numéricas. En dicho caso, se debe emplear elementos finitos de orden mayor para prevenir discontinuidades

fuertes durante la evaluación de dichos términos. Un estudio detallado en relación a la estabilidad numérica de la aproximación paraxial en función del orden del desarrollo puede ser consultado en Modaressi (1987); de Martin and Aochi (2008).

De forma simbólica, las expresiones anteriores pueden ser resumidas en el dominio temporal por medio de un operador \underline{A}_n para el orden n -ésimo del desarrollo del campo de desplazamientos \underline{u}_s sobre el borde Σ del dominio Ω_s :

$$\underline{t}(\underline{x}, t) = \underline{A}_0(\dot{\underline{u}}_s) \quad (36)$$

$$\underline{t}(\underline{x}, t) = \underline{A}_1(\dot{\underline{u}}_s, \partial_x \underline{u}_s) \quad (37)$$

Usualmente, el desplazamiento total sobre el dominio no-acotado $\Omega_{s'}$ se descompone en un campo incidente \underline{u}_i y en un campo reflejado \underline{u}_r :

$$\underline{u}_{s'} = \underline{u}_i + \underline{u}_r \quad (38)$$

donde el campo reflejado debe desaparecer suficientemente lejos de Σ :

$$\lim_{\|\underline{x}\| \rightarrow \infty} \underline{u}_r = \underline{0} \quad (39)$$

Sobre el borde, el vector esfuerzo debido a la difracción de las ondas puede ser calculado por medio de:

$$\underline{t}(\underline{u}_r, t) = \underline{A}_0(\dot{\underline{u}}_r) \quad \text{or} \quad \underline{t}(\underline{u}_r, t) = \underline{A}_1(\dot{\underline{u}}_r, \partial_x \underline{u}_r) \quad (40)$$

Empleando la continuidad del vector esfuerzo en Σ y la hipótesis de comportamiento elástico en la vecindad del contorno, la aproximación de orden cero para el vector esfuerzo total puede ser escrita como:

$$\begin{aligned} \underline{t}(\underline{u}_s, t) &= -\underline{t}(\underline{u}_{s'}, t) \\ &= -\underline{t}(\underline{u}_i, t) - \underline{t}(\underline{u}_r, t) \\ &= -\underline{t}(\underline{u}_i, t) - \underline{A}_0(\dot{\underline{u}}_r) \\ &= -\underline{t}(\underline{u}_i, t) - \underline{A}_0(\dot{\underline{u}}_s) + \underline{A}_0(\dot{\underline{u}}_i) \end{aligned} \quad (41)$$

La extensión para el caso bifásico correspondiente a un medio poroso saturado se encuentra descrita en Modaressi and Benzenati (1994) para la formulación simplificada $u - p$ del modelo de Biot. La extensión de la aproximación paraxial para un borde absorbente para métodos de tipo MESHLESS se describe en Aubert (1997).

Referencias

- Aubert, P. (1997). *Méthodes MESHLESS en Géomécanique*. Thèse de doctorat, École Centrale Paris.
- Clayton, R. and Engquist, B. (1977). Absorbing boundary conditions for acoustic and elastic wave equations. *B.S.S.A.*, 67(6):1529–1540.
- de Martin, F. and Aochi, H. (2008). Radiation boundary condition using paraxial approximation. Report BRGM, BRGM.
- Engquist, B. and Majda, A. (1977). Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves. *Mathematics of Computation*, 31(139):629–651.
- Modaressi, H. (1987). *Modélisation numérique de la propagation des ondes dans les milieux poreux anelastiques*. Thèse de doctorat, École Centrale Paris.

- Modaressi, H. and Benzenati, I. (1994). Paraxial approximation for poroelastic media. *Soil dynamics and Earthquake Engineering*, 13(2):117–129.
- Wolf, J. (1985). *Dynamic Soil-Structure Interaction*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Wolf, J. and Song, C. (1996). *Finite-element modelling of unbounded media*. John Wiley & Sons, Baffins Lane, England.
- Zienkiewicz, O., Bicanic, N., and Shen, F. (1988). Earthquake input definition and the transmitting boundary conditions. In Doltsinis, I. S., editor, *Advances in Computational Nonlinear Mechanics*, pages 109–138. Springer-Verlag.