

Una metodología reciente para determinar la resistencia al corte en macizos rocosos

Roberto Ucar Navarro
Profesor Facultad de Ingeniería
Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela



ABSTRACT

En la presente trabajo se ha desarrollado una expresión analítica que permite hallar la resistencia al corte en macizos rocosos y en materiales de rotura frágil como el concreto en función de los esfuerzos principales σ_1 y σ_3 . A través de este un nuevo criterio empírico de rotura bidimensional se ha determinado la envolvente de falla al resolver la ecuación diferencial lineal de primer orden. Para facilitar los cálculos la relación entre los esfuerzos principales σ_1 y σ_3 en el instante de la rotura se ha expresado en forma adimensional. El cálculo analítico de la envolvente o curva de resistencia intrínseca se ha obtenido considerando como punto de partida que se conoce la magnitud del esfuerzo normal σ_n , el cual corresponde a la solución de la ecuación diferencial. Posteriormente, utilizando la técnica de iteración con el objeto que la función $\zeta(\sigma_n, \beta) = 0$, se obtiene β . A través del referido ángulo, junto con la tensión normal σ_n se halla la resistencia al corte τ_α . Cabe destacar, que esta representación analítica de la curva intrínseca ayudará sin lugar a dudas a desarrollar nuevos métodos de cálculo en lo concerniente a la estabilidad de taludes y obras subterráneas, en el diseño del soporte en macizos rocosos mediante anclajes, en la estimación de la resistencia por el fuste en roca de calidad pobre siendo el tipo de fundación por medio de pilotes, así como la carga de hundimiento de una fundación en terrenos diaclasados, y en otras innumerables aplicaciones dentro del campo de la geotecnia. Por otra parte, debe indicarse que excelentes resultados se han obtenido empleando este nuevo criterio de rotura al determinar la resistencia al corte del concreto en función de los parámetros K_1 y K_2 a través de pruebas de laboratorio en probetas sometidas a tracción, compresión uniaxial y triaxial, esta última para la condición en la cual $\sigma_2 = \sigma_3$.

1 INTRODUCCION

En los últimos años una extensa investigación se ha realizado en el campo de la ingeniería geotécnica con el objeto de poder determinar con mayor precisión la resistencia al corte de la roca tanto en la condición sana como fracturada.

Todo esto ha generado como resultado la publicación de una gran cantidad de estudios para definir un criterio tanto del punto de vista teórico como experimental que permita predecir la rotura del macizo rocoso, desde que en 1773 Coulomb postulara la primera hipótesis de falla.

La causa fundamental de que ninguno de los criterios existentes haya tenido una utilización universal radica en el hecho de que son muchos los parámetros que gobiernan el proceso de rotura de la roca, factores estos que dependen tanto del propio macizo rocoso como del estado tensional.

Cabe destacar que en las últimas décadas se han desarrollado diferentes criterios empíricos, los cuales aunque no poseen el esperado fundamento científico, ofrecen la gran ventaja de acercarse a la realidad del fenómeno físico.

Por otra parte, el gran reto se fundamenta en llevar a cabo investigaciones que permitan obtener la resistencia de la roca en la condición fracturada y meteorizada; tarea esta nada fácil por lo complejo del problema.

También otro aspecto a señalar son las importantes contribuciones realizadas por Bieniaswki (1989), Barton

(2002), Hoek y Brown (1989) y Ramamurthy (1986) entre otros destacados investigadores, al avanzar con paso firme y aproximarse a los valores reales de la resistencia de la roca en función del grado y las características de la fracturación, tamaño de los bloques, abertura, relleno y alteración de las discontinuidades.

Otra valiosa contribución, ha sido la de Yu (2003) a través de su excelente libro "Unified Strength Theory and Its Applications", el cual se recomienda su lectura junto con el de los siguientes autores:

Sheory (1997), "Empirical Rock Failure Criteria", Andreev (1995), "Brittle Failure Of Rocks Materials

Por supuesto, el objetivo final de este apasionante tema concerniente con la resistencia de macizos rocosos, es desarrollar a través de futuras investigaciones junto con las ya existentes, un criterio práctico y efectivo de rotura en tres dimensiones, por cuanto hay evidencias que demuestran que el esfuerzo principal intermedio σ_2 tiene influencia en la resistencia de la roca.

2 DESARROLLO MATEMATICO CURVA DE RESISTENCIA INTRINSECA

Utilizando las ecuaciones de equilibrio en un estado bidimensional y mediante la Figura (1) se sabe que:

$$\left[\sigma_\alpha - \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_3) \right]^2 + \tau_\alpha^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)^2 \quad (1)$$

Que equivale a escribir:

$$f(\sigma_\alpha, \sigma_1, \sigma_3, \tau_\alpha) = \left[\sigma_\alpha - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \right]^2 + \tau_\alpha^2 - \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)^2 = 0$$

Por cuanto $\sigma_1 = \zeta(\sigma_3)$, la ecuación (1) toma la forma:

$$f(\sigma_\alpha, \tau_\alpha, \sigma_3) = 0 \quad (2)$$

Donde, $\sigma_\alpha = \sigma_n$ y τ_α representan el esfuerzo normal y tangencial sobre el plano de rotura respectivamente. Por otra parte, si la familia de líneas planas $f(\sigma_\alpha, \tau_\alpha, \sigma_3) = 0$, admite envolvente, las funciones $\sigma_\alpha = \psi(\sigma_3)$ y $\tau_\alpha = \varphi(\sigma_3)$ que definen las ecuaciones paramétricas de esta envolvente, satisfacen el sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} f(\sigma_\alpha, \tau_\alpha, \sigma_3) &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \sigma_3} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Despejando en (3) las tensiones σ_α y τ_α en función de σ_3 , se obtienen las ecuaciones paramétricas que definen la envolvente. Asimismo, en caso que sea posible, se puede proceder eliminando σ_3 en las dos ecuaciones indicadas en (3), hallándose una relación de la forma $\zeta(\sigma_\alpha, \tau_\alpha) = 0$, la cual representa también la envolvente.

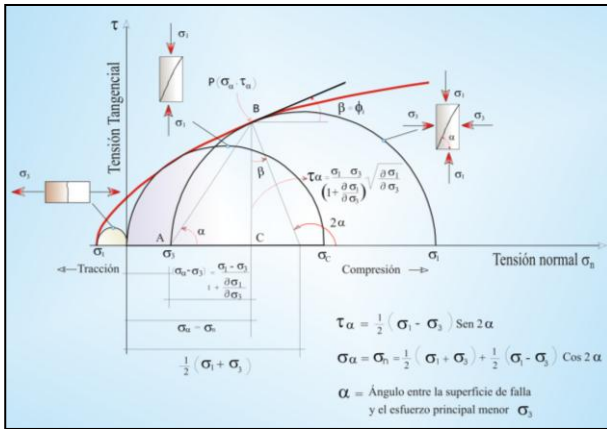


Figura 1. Envolvente de rotura por cizallamiento en macizos rocosos.

Cabe destacar, que la familia de circunferencias de radio variable σ_3 , representada a través de (1) recibe el nombre de involutas.

Tomando la derivada de σ_1 con respecto a σ_3 en ambos lados de la ecuación (1) queda:

$$2 \left[\sigma_\alpha - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \right] \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} + 1 \right) \right] = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right) \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} - 1 \right) \quad (4)$$

$$\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} - 1 \right) \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right) + \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} + 1 \right) \left[\sigma_\alpha - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \right] = 0 \quad (5)$$

Al simplificar resulta:

$$\sigma_\alpha = \sigma_3 + \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{\left(1 + \frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} \right)} \quad (6)$$

Reemplazando (6) en (1) y despejando τ_α , se obtiene:

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\left(1 + \frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} \right)} \sqrt{\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3}} \quad (7)$$

Al dividir (7) entre (6), es posible escribir:

$$\frac{\tau_\alpha}{(\sigma_\alpha - \sigma_3)} = \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} \right)^{1/2} \therefore \tau_\alpha = (\sigma_\alpha - \sigma_3) \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} \right)^{1/2} \quad (8)$$

Por otro lado, al observar el triángulo ABC de la Figura (1), el ángulo de rotura se calcula a través de la expresión:

$$\tan \alpha = \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} \right)^{1/2} \quad (9)$$

Igualmente, al observar la Figura (1), se aprecia que el ángulo que forma el plano de falla α con el esfuerzo principal menor y la inclinación de la envolvente de falla β , están relacionados a través de la expresión:

$$2\alpha = (\pi/2 + \beta) \quad (10)$$

Es decir:

$$\tan \beta \cdot \tan 2\alpha = -1 \quad (11)$$

Cabe destacar, que β se conoce también como el ángulo de fricción interna instantáneo. A la vez utilizando (11), la pendiente de la envolvente puede determinarse como sigue:

$$\left(\frac{d\tau_\alpha}{d\sigma_\alpha} \right) = \tan \beta = \left(\frac{\tan^2 \alpha - 1}{2 \tan \alpha} \right) \quad (12)$$

Al reemplazar (9) en (12), resulta:

$$\left(\frac{d\tau_\alpha}{d\sigma_\alpha} \right) = \tan \beta = \frac{\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} \right) - 1}{2 \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} \right)^{1/2}} = \tau'_\alpha \quad (13)$$

Llamando: $\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} \right) = \sigma'_1$, queda:

$$\tau'_\alpha = \frac{\sigma'_1 - 1}{2(\sigma'_1)^{1/2}} \quad (14)$$

La cual se transforma:

$$\sigma'_1 - 2\tau'_\alpha \cdot (\sigma'_1)^{1/2} - 1 = 0 \quad (15)$$

De donde:

$$(\sigma'_1)^{1/2} = \tau'_\alpha + [1 + (\tau'_\alpha)^2]^{1/2} \quad (16)$$

Despejando $\sigma_\alpha = \sigma_n$ en (5), se tiene:

$$\sigma_\alpha = \frac{1}{2} \left[(\sigma_1 + \sigma_3) (\sigma_1 - \sigma_3) \frac{\sigma'_1 - 1}{\sigma'_1 + 1} \right] \quad (17)$$

Al simplificar resulta:

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_3 \cdot \sigma'_1}{1 + \sigma'_1} \quad (18)$$

Al despejar el esfuerzo principal menor σ_3 de la ecuación (7) se obtiene:

$$\sigma_3 = \sigma_1 - \frac{\tau_\alpha (1 + \sigma'_1)}{(\sigma'_1)^{1/2}} \quad (19)$$

Reemplazando dicho valor en (18), queda:

$$\sigma_\alpha (1 + \sigma'_1) = \sigma_1 + \sigma'_1 \left[\sigma_1 - \frac{\tau_\alpha (1 + \sigma'_1)}{(\sigma'_1)^{1/2}} \right] \quad (20)$$

Al despejar σ_1 de la ecuación anterior, es posible escribir:

$$\sigma_1 = \sigma_\alpha + \tau_\alpha (\sigma'_1)^{1/2} \quad (21)$$

Sustituyendo (16) en (21) se obtiene:

$$\sigma_1 = \sigma_\alpha + \tau_\alpha \left[\tau'_\alpha + (1 + \tau'^2_\alpha)^{1/2} \right] \quad (22)$$

Es decir:

$$\sigma_1 = \sigma_\alpha + \tau_\alpha \cdot \tau'_\alpha + \tau_\alpha \cdot (1 + \tau'^2_\alpha)^{1/2} \quad (23)$$

Igualmente, el esfuerzo principal menor σ_3 puede expresarse:

$$\sigma_3 = \sigma_\alpha + \tau_\alpha \cdot \tau'_\alpha - \tau_\alpha \cdot (1 + \tau'^2_\alpha)^{1/2} \quad (24)$$

Siendo la diferencia entre los esfuerzos principales:

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = 2 \tau_\alpha \cdot (1 + \tau'^2_\alpha)^{1/2} \quad (25)$$

Elevando (16) al cuadrado:

$$\sigma'_1 = \tau'^2_\alpha + 2\tau'_\alpha \left[1 + \tau'^2_\alpha \right]^{1/2} + \left[1 + \tau'^2_\alpha \right] \quad (26)$$

Así:

$$\sigma'_1 = \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} \right) = 1 + 2 \tau'_\alpha \left[1 + \tau'^2_\alpha \right]^{1/2} \quad (27)$$

3 NUEVO CRITERIO PROPUESTO

El criterio bidimensional propuesto en esta investigación que relaciona los esfuerzos principales σ_1 y σ_3 en el instante de la rotura está representado por la ecuación:

$$\sigma_1 = K_1 \sigma_3 - \sigma_t + K \sigma_3 - \sigma_t^{1/2} \quad (28)$$

Siendo K y K_1 contantes del material a determinar y σ_t la resistencia a la tracción.

En el caso del ensayo de compresión sin confinar, se sabe que:

$$\sigma_3 = 0 \quad \text{y por lo tanto } \sigma_1 = \sigma_c, \text{ transformándose la ecuación (28) como sigue:}$$

$$\sigma_c = K_1 - \sigma_t + K - \sigma_t^{1/2} \quad (29)$$

Cabe destacar que los signos convencionales utilizados en las tensiones o esfuerzos son: **Compresión es positivo y la tracción negativa.**

Al despejar el valor de K_1 en (29), se obtiene:

$$K_1 = \frac{K - \sigma_t^{1/2} - \sigma_c}{\sigma_t} \quad (30)$$

Dividiendo ambos lados de la ecuación (28) por σ_c resulta:

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c} \right) = K_1 \left(\frac{\sigma_3 - \sigma_t}{\sigma_c} \right) + \frac{K}{\sqrt{\sigma_c}} \left(\frac{\sigma_3 - \sigma_t}{\sigma_c} \right)^{1/2} \quad (31)$$

Como previamente se ha mencionado,

$$\xi = \left(\frac{\sigma_t}{\sigma_c} \right) \quad (32)$$

Si además, se tiene en cuenta que:

$$K_2 = \frac{K}{\sqrt{\sigma_c}} \quad (33)$$

La ecuación (31) se transforma,

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c} \right) = K_1 \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} - \xi \right) + K_2 \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} - \xi \right)^{1/2} \quad (34)$$

Si se aplica nuevamente el caso del ensayo de compresión simple, es decir:

$\sigma_3 = 0$, y por lo tanto $\sigma_1 = \sigma_c$, se debe cumplir a través de la ecuación (34) que:

$$1 = K_1 - \xi + K_2 - \xi^{1/2} \quad (35)$$

Como ejemplo de aplicación Torres (1992), en su trabajo de investigación realizado en un total de 55 probetas de concreto de 5,00cm de diámetro y 10,00 cm de altura, a través de ensayos de compresión simple, tracción indirecta y compresión triaxial ($\sigma_2 = \sigma_3$) llevados a cabo en el Laboratorio de Materiales y Ensayos de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Los Andes, determinó los siguiente parámetros:

$$\sigma_c = 33,00 \text{ MN} / \text{m}^2, \sigma_t = -3,50 \text{ MN} / \text{m}^2, K_1 = 0,712 \text{ y } K_2 = 2,839$$

$$\xi = \frac{\sigma_t}{\sigma_c} = \frac{-35,00 \text{ MN} / \text{m}^2}{330,00 \text{ MN} / \text{m}^2} = -0,107$$

Al utilizar (35), resulta:

$$0,712 \cdot 0,107 + 2,839 \cdot 0,107^{1/2} = 1,0048 \approx 1$$

Por lo tanto, cumple con dicha condición.

Finalmente, para simplificar cálculos posteriores es conveniente expresar la ecuación (34) en la forma siguiente:

$$\bar{\sigma}_1 = K_1 \bar{\sigma}_3 - \xi + K_2 \bar{\sigma}_3 - \xi^{1/2} \quad (36)$$

Siendo,

$$\bar{\sigma}_1 = \frac{\sigma_1}{\sigma_c} \quad y \quad \bar{\sigma}_3 = \frac{\sigma_3}{\sigma_c} \quad (37)$$

3.1 Determinación de la envolvente de rotura

Primeramente, es necesario determinar la pendiente de la curva que relaciona los esfuerzos principales σ_1 y σ_3 . Así al derivar la ecuación (36) el valor de la pendiente

$$\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3}\right) = \left(\frac{\partial \bar{\sigma}_1}{\partial \bar{\sigma}_3}\right) \text{ es:}$$

$$\left(\frac{\partial \bar{\sigma}_1}{\partial \bar{\sigma}_3}\right) = K_1 + \frac{K_2}{2\sqrt{\bar{\sigma}_3 - \xi}} \quad (38)$$

Utilizando (27) y considerando que:

$$\tau'_\alpha = \left(\frac{d\tau_\alpha}{d\sigma_\alpha}\right) = \tan \beta \quad (39)$$

Se obtiene la siguiente expresión:

$$\sigma'_1 = \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3}\right) = 1 + 2 \cdot \tan^2 \beta + 2 \tan \beta \cdot \sec \beta \quad (40)$$

Mediante transformaciones trigonométricas (40) se reduce finalmente en la expresión siguiente:

$$\sigma'_1 = \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3}\right) = \left(\frac{1 + \tan \beta}{1 - \tan \beta}\right) = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) \quad (41)$$

Igualando (38) y (41), resulta:

$$\tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) = K_1 + \frac{K_2}{2\sqrt{\bar{\sigma}_3 - \xi}} = \tan^2 \alpha \quad (42)$$

Al despejar $\bar{\sigma}_3 - \xi$ resulta:

$$\bar{\sigma}_3 - \xi = \frac{\frac{1}{4} K_2^2}{\left[\tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) - K_1\right]^2} = \frac{K_3}{\left[\tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) - K_1\right]^2} \quad (43)$$

Siendo,

$$K_3 = \left(\frac{K_2}{2}\right)^2 \quad (44)$$

Por otra parte, la ecuación (8) expresada adimensionalmente toma la forma:

$$\bar{\tau}_\alpha = \bar{\sigma}_n - \bar{\sigma}_3 \left(\frac{\partial \bar{\sigma}_1}{\partial \bar{\sigma}_3}\right)^{1/2} \quad (45)$$

Al igual que lo indicado a través de (37), todas las tensiones o esfuerzos se han expresado en forma

adimensional al dividirse por la resistencia la compresión simple de la roca intacta σ_c .

$$\bar{\sigma}_n = \frac{\sigma_n}{\sigma_c} \quad y \quad \bar{\tau}_\alpha = \frac{\tau_\alpha}{\sigma_c} \quad (46)$$

Por simplicidad en términos de (x, y) , la ecuación (45) se transforma:

$$y = x - \bar{\sigma}_3 \left(\frac{\partial \bar{\sigma}_1}{\partial \bar{\sigma}_3}\right)^{1/2} \quad (47)$$

Es decir:

$$\bar{\tau}_\alpha = y, \quad \bar{\sigma}_n = x \quad (48)$$

A través de (41) se sabe que:

$$\left(\frac{\partial \bar{\sigma}_1}{\partial \bar{\sigma}_3}\right)^{1/2} = \tan \left(45 + \frac{\beta}{2}\right) \text{ por lo tanto,}$$

$$y = x - \bar{\sigma}_3 \cdot \tan \left(45 + \frac{\beta}{2}\right) \quad (49)$$

La cual puede expresarse también,

$$y \cdot \tan \left(45 - \frac{\beta}{2}\right) = x - \bar{\sigma}_3 \quad (50)$$

Al despejar $\bar{\sigma}_3$ resulta,

$$\bar{\sigma}_3 = x - y \tan \left(45 - \frac{\beta}{2}\right) \quad (51)$$

Que equivale a escribir,

$$\bar{\sigma}_3 - \xi = x - \xi - y \cdot \tan \left(45 - \frac{\beta}{2}\right) \quad (52)$$

Reemplazando el valor de $\bar{\sigma}_3 - \xi$ indicado a través de la ecuación (43) en (52), se obtiene que:

$$\frac{K_3}{\left[\tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) - K_1\right]^2} = x - \xi - y \cdot \tan \left(45 - \frac{\beta}{2}\right) \quad (53)$$

Al despejar $y = (\tau_\alpha / \sigma_c) = \bar{\tau}_\alpha$ queda:

$$y = x - \xi \cdot \tan \left(45 + \frac{\beta}{2}\right) - \frac{K_3 \cdot \tan \left(45 + \frac{\beta}{2}\right)}{\left[\tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) - K_1\right]^2} \quad (54)$$

Llamando a $X = (x - \xi)$, la ecuación anterior se transforma finalmente.

$$y = X \cdot \tan \left(45 + \frac{\beta}{2}\right) - \frac{K_3 \cdot \tan \left(45 + \frac{\beta}{2}\right)}{\left[\tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) - K_1\right]^2} \quad (55)$$

Por otra parte, al derivar la ecuación anterior se obtiene la pendiente de la envolvente, es decir;

$$\tan \beta = \frac{dy}{dX} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) + X \frac{\sec^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right)}{2} \left(\frac{d\beta}{dX}\right) - K_3 \left\{ \frac{f_1 \beta - f_2 \beta}{\left[\tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right)\right]^4} \right\} \left(\frac{d\beta}{dX}\right) \quad (56)$$

Siendo las funciones,

$$f_1 \beta = \frac{1}{2} \sec^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) \left[\tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) - K_1 \right]^2 \quad (57)$$

$$f_2 \beta = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) \left\{ 2 \left[\tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) - K_1 \right] \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) \sec^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) \right\} \quad (58)$$

Luego de realizar simplificaciones se obtiene:

$$2 \left[\tan \beta - \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) \right] \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) = X \left(\frac{d\beta}{dX}\right) + K_3 \cdot f_3(\beta) \cdot \left(\frac{d\beta}{dX}\right) \quad (59)$$

$$f_3(\beta) = \left\{ \frac{3 \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) + K_1}{\left[\tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) - K_1 \right]^3} \right\} \quad (60)$$

A través de transformaciones trigonométricas la fórmula anterior se transforma:

$$-\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) = X \left(\frac{d\beta}{dX}\right) + K_3 \left\{ \frac{3 \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) + K_1}{\left[\tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) - K_1 \right]^3} \right\} \left(\frac{d\beta}{dX}\right) \quad (61)$$

Finalmente al expresar esta última ecuación en términos de $\left(\frac{dX}{d\beta}\right)$ queda:

$$\left(\frac{dX}{d\beta}\right) + X \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) + K_3 \left\{ \frac{3 \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) + K_1}{\left[\tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) - K_1 \right]^3} \right\} \cdot \left(\frac{dX}{d\beta}\right) = 0 \quad (62)$$

El próximo paso es resolver la ecuación lineal de primer orden, que es de primer grado en la variable dependiente y a su derivada. La cual en forma compacta toma la forma,

$$\frac{dX}{d\beta} + P \beta \cdot X + Q(\beta) = 0 \quad (63)$$

Siendo por lo tanto,

$$\left. \begin{aligned} P(\beta) &= \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) \\ Q(\beta) &= K_3 \left\{ \frac{3 \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) + K_1}{\left[\tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) - K_1 \right]^3} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

La solución de la ecuación diferencial lineal es:

$$X = e^{-\int P(\beta) d\beta} \left[K_4 - \int e^{\int P(\beta) d\beta} \cdot Q(\beta) d\beta \right] \quad (65)$$

Siendo K_4 una constante de integración a determinarse posteriormente en función de las condiciones de borde. Aplicando (65) se obtiene,

$$X = e^{-\int \left(\frac{\cos \beta}{1 - \operatorname{sen} \beta}\right) d\beta} \left\{ K_4 - K_3 \int e^{\int \left(\frac{\cos \beta}{1 - \operatorname{sen} \beta}\right) d\beta} \left[\frac{3 \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) + K_1}{\left[\tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) - K_1 \right]^3} \right] \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) d\beta \right\} \quad (66)$$

$$X = 1 - \operatorname{sen} \beta \left\{ K_4 - \int \frac{K_3}{1 - \operatorname{sen} \beta} \left[\frac{3 \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) + K_1}{\left[\tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) - K_1 \right]^3} \right] \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) d\beta \right\} \quad (67)$$

Al considerar que,

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) = \frac{\cos \beta}{1 - \operatorname{sen} \beta}, \text{ y } \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) = \left(\frac{1 + \operatorname{sen} \beta}{1 - \operatorname{sen} \beta}\right), \text{ la}$$

solución de la integral se simplifica, obteniéndose finalmente,

$$X = 1 - \operatorname{sen} \beta \left\{ K_4 + \frac{K_3}{1 + K_1} \left[\frac{4K_1}{\left[1 - K_1 + 1 + K_1 \operatorname{sen} \beta \right]^2} + \frac{(3 - K_1)}{\left[1 - K_1 + 1 + K_1 \operatorname{sen} \beta \right]} \right] \right\} \quad (68)$$

Teniendo en cuenta que $X = (x - \xi)$ y $K_3 = (K_2/2)^2$, resulta finalmente:

$$x - \xi = 1 - \operatorname{sen} \beta \left\{ K_4 + \left(\frac{K_2}{2 + K_1}\right)^2 \left[\frac{4K_1 + (3 - K_1) \left[1 - K_1 + 1 + K_1 \operatorname{sen} \beta \right]}{\left[1 - K_1 + 1 + K_1 \operatorname{sen} \beta \right]^2} \right] \right\} \quad (69)$$

Con las ecuaciones (54) y (69) se tiene el par de ecuaciones requeridas representadas paraméricamente a través del ángulo β que forma la tangente a la envolvente de falla, conocida también como línea de resistencia intrínseca.

Igualmente, se observa que tanto el esfuerzo cortante τ_α como el normal σ_n están expresados en forma adimensional, es decir: $y = (\tau_\alpha / \sigma_c)$, $x = (\sigma_n / \sigma_c)$.

Por lo tanto, si se conoce la tensión normal σ_n a través de la ecuación (69) se determina β y posteriormente τ_α empleando (54).

En estas condiciones para cada intervalo de esfuerzos (σ_n , τ_α), habrá un ángulo β , o ángulo de fricción interna instantáneo φ_i

3.2 Cálculo de la constante de integración K_4 - Un ejemplo de aplicación

Para efectos prácticos se ha considerado el siguiente ejemplo.

Parámetros de la roca obtenidos a través de pruebas de laboratorio y aplicando la técnica de mínimos cuadrados:

$K_1 = 2$ y $K_2 = 3,50$, $\sigma_c = 32,00$ MPa y $\sigma_t = -2,00$ MPa,

$$\xi = \frac{\sigma_t}{\sigma_c} = -\frac{1}{16}$$

Al aplicar (34) se tiene la siguiente relación entre los esfuerzos principales;

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c} \right) &= K_1 \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} - \xi \right) + K_2 \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} - \xi \right)^{1/2} \\ \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c} \right) &= 2 \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} + \frac{1}{16} \right) + 3,5 \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} + \frac{1}{16} \right)^{1/2} \end{aligned} \right\}$$

Por otra parte, cuando $\sigma_3 = 0$ (ensayo de compresión sin confinar) $\sigma_1 = \sigma_c$, debiéndose cumplir de acuerdo a (35) que:

$$\left. \begin{aligned} 1 &= K_1 - \xi + K_2 - \xi^{1/2} \\ 1 &= 2 \left(\frac{1}{16} \right) + 3,5 \left(\frac{1}{16} \right)^{1/2} \end{aligned} \right\}$$

A través de (38), la pendiente de la curva que relaciona σ_1 y σ_3 es,

$$\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} \right) = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2} \right) = K_1 + \frac{K_2}{2\sqrt{\sigma_3 - \xi}} = 2 + \frac{3,5}{2\sqrt{\sigma_3 + \frac{1}{16}}}$$

Para facilitar los cálculos, se determinará primeramente la pendiente para el caso particular de un ensayo de compresión simple, en el cual $\sigma_3 = 0$.

$$\tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2} \right) = 2 + \frac{3,5}{2\sqrt{\frac{1}{16}}} = 9$$

Por otra parte, se sabe que el ángulo (α) que forma el plano de falla con el esfuerzo principal menor es,

$$\alpha = \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2} \right) = 71,56^\circ$$

Siendo por lo tanto $\beta = 53,13^\circ$

Al considerar la ecuación (6) expresada forma adimensional se determina la relación (σ_n / σ_c), y el esfuerzo normal σ_n actuando sobre el plano de rotura de inclinación (α) con la horizontal.

Para el ensayo de compresión simple se sabe que:

$\sigma_3 / \sigma_c = 0$, y $\sigma_1 / \sigma_c = 1$, obteniéndose:

$$\frac{\sigma_n}{\sigma_c} = \frac{\sigma_3}{\sigma_c} + \frac{\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_c} \right)}{\left(1 + \frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3} \right)} = \frac{1}{1+9} = 1/10$$

Por lo tanto el esfuerzo normal como una fracción de σ_c es,

$$\sigma_n = \frac{1}{10} \sigma_c = 3,20 \text{ MPa}$$

Igualmente, la tensión normal puede obtenerse a través de la conocida ecuación:

$$x = \overline{\sigma_n} = \frac{\sigma_n}{\sigma_c} = \frac{\sigma_1}{\sigma_c} \cos^2 \alpha + \frac{\sigma_3}{\sigma_c} \sin^2 \alpha = 1 \cdot \cos^2 71,56^\circ = \frac{1}{10}$$

Reemplazando dicho valor en (69) se determina la constante de integración K_4 .

$$\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{16} \right) = 1 - \sin 53,13^\circ \left\{ K_4 + \frac{3,0625}{9} \left[\frac{8 + (3-2) \left[1 - 2 + 1 + 2 \sin 53,13^\circ \right]}{\left[1 - 2 + 1 + 2 \sin 53,13^\circ \right]^2} \right] \right\}$$

$$K_4 = -0,81944$$

A través de (49), el esfuerzo cortante para la condición en la cual $\overline{\sigma_3} = \frac{\sigma_3}{\sigma_c} = 0$ es,

$$y = \overline{\tau_\alpha} = \frac{\tau_\alpha}{\sigma_c} = x - \overline{\sigma_3} \cdot \tan \left(45 + \frac{\beta}{2} \right) = \frac{1}{10} \tan 71,56^\circ = \frac{3}{10}$$

$$\tau_\alpha = \frac{3}{10} \sigma_c = 9,60 \text{ MPa}$$

Igual valor se obtiene a través de la ecuación,

$$\frac{\tau_\alpha}{\sigma_c} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c} - \frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right) \sin 2\alpha = 1 \cdot \sin 143,12^\circ = \frac{3}{10}$$

Resumiendo, a continuación se indican los valores de obtenidos a través del ensayo de compresión sin confinar ($\sigma_3 = 0$) son los siguientes:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\sigma_n}{\sigma_c}, \frac{\tau_\alpha}{\sigma_c} \right) &= \left(\frac{1}{10}, \frac{3}{10} \right) \\ \sigma_c = 32,00 \text{ MPa} &\Rightarrow \sigma_n, \tau_\alpha = (3,20, 9,60) \\ \sigma_t = -2,00 \text{ MPa} &\Rightarrow \xi = \left(\frac{\sigma_t}{\sigma_c} \right) = -\frac{1}{16} \\ \alpha = \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2} \right) &= 71,56^\circ, \beta = 53,13^\circ \end{aligned} \right\} \text{ Véase figura (1)}$$

En definitiva, la envolvente de rotura indicada en (54) puede construirse partiendo de la ecuación (69)

considerando inicialmente diferentes valores de $\frac{\sigma_n}{\sigma_c}$, por

ejemplo:

$$\frac{\sigma_n}{\sigma_c} = 0, 0,05, 0,10, 0,20, 0,30, 0,40, 0,50, \dots$$

Luego para cada valor de $x = (\sigma_n/\sigma_c)$ se determina el correspondiente ángulo β y seguidamente $y = (\tau_\alpha/\sigma_c)$, a través de la referida ecuación (54). Continuando con el problema, se determinará un segundo punto de la envolvente considerando el caso particular que $\sigma_3/\sigma_c = 0,10$.

Por lo tanto, para esta presión de confinamiento, la rotura ocurrirá cuando σ_1/σ_c alcance el siguiente valor.

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c}\right) &= K_1 \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} - \xi\right) + K_2 \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} - \xi\right)^{1/2} \\ \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c}\right) &= 2 \left(0,1 + \frac{1}{16}\right) + 3,5 \left(0,1 + \frac{1}{16}\right)^{1/2} = 1,736 \end{aligned} \right\} \sigma_1 = 55,55 \text{ MPa}$$

La inclinación de la tangente a la envolvente de falla β y el ángulo que forma el plano de rotura α con el esfuerzo principal menor en el intervalo $(\sigma_3/\sigma_c, \sigma_1/\sigma_c)$, representado por los valores (0,10, 1,736) son los siguientes:

$$\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_3}\right) = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) = K_1 + \frac{K_2}{2\sqrt{\sigma_3 - \xi}} = 2 + \frac{3,5}{2\sqrt{0,10 + \frac{1}{16}}} = 6,34$$

$$\beta = 46,68^\circ \text{ y } \alpha = (\pi/4 + \beta/2) = 68,34^\circ$$

Al utilizar la ecuación (69) y (54), el valor de (σ_n/σ_c) y (τ_α/σ_c) , es respectivamente:

$$\left(\frac{\sigma_n}{\sigma_c} + \frac{1}{16}\right) = 1 - \text{sen}46,68^\circ \left\{ -0,81944 + \frac{3,0625}{9} \left[\frac{7 + 3 \cdot \text{sen}46,68^\circ}{[-1 + 3 \cdot \text{sen}46,68^\circ]^2} \right] \right\}$$

$$\frac{\sigma_n}{\sigma_c} = 0,323 \approx \frac{1}{3}$$

$$\frac{\sigma_n}{\sigma_c} = \frac{\sigma_1}{\sigma_c} \cos^2 \alpha + \frac{\sigma_3}{\sigma_c} \text{sen}^2 \alpha = 1,736 \cdot \cos^2 68,34^\circ + \frac{1}{10} \text{sen}^2 68,34^\circ = 0,323$$

$$\sigma_n = 10,34 \text{ MPa}$$

$$\frac{\tau_\alpha}{\sigma_c} = \frac{\tau_\alpha}{\sigma_c} = \left(\frac{\sigma_n}{\sigma_c} - \frac{\sigma_3}{\sigma_c}\right) \cdot \tan \left(45 + \frac{\beta}{2}\right) = \left(0,323 - \frac{1}{10}\right) \tan 68,34^\circ$$

$$\tau_\alpha = 0,562 \cdot \sigma_c = 17,98 \approx 18,00 \text{ MPa}$$

Resumiendo, para $(\sigma_3/\sigma_c = 1/10) \longrightarrow (\sigma_1/\sigma_c = 1,736)$, los valores son:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\sigma_n}{\sigma_c}, \frac{\tau_\alpha}{\sigma_c}\right) &= 0,323, 0,562 \\ \sigma_c &= 32,00 \text{ MPa} \Rightarrow \sigma_n, \tau_\alpha = (10,34, 17,98) \text{ MPa} \\ \sigma_1 &= -2,00 \text{ MPa} \Rightarrow \xi = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c}\right) = -\frac{1}{16} \\ \alpha &= \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) = 68,34^\circ, \beta = 48,64^\circ \end{aligned} \right\} \text{ Véase figura (1)}$$

4 CONCLUSIONES

Utilizando la nueva propuesta que relaciona los esfuerzos principales en el instante de la rotura, y teniendo en cuenta al mismo tiempo el método analítico desarrollado en esta investigación a través del cual se determina la envolvente de rotura por corte en rocas, es lógico concluir que se genera un nuevo campo de investigación al aplicar dicha envolvente de falla por cizallamiento.

A la vez, se podrán mejorar los métodos de cálculo en todo lo concerniente a la estabilidad de taludes, en el soporte de excavaciones subterráneas, además de mejorar los procedimientos para estimar la capacidad portante en roca de calidad pobre. Igualmente, en el diseño de anclajes en macizos rocosos inestables, así como en otras muchas aplicaciones de interés geotécnico.

Por otra parte, se recomienda emplear esta nueva ecuación que gobierna la resistencia al corte en macizos rocosos, en lugar la bien conocida y empleada envolvente de falla de Mohr-Coulomb, la cual se ha estado utilizando en una forma aproximada, a sabiendas que la verdadera curva de resistencia intrínseca no es lineal. En estas condiciones se deberá determinar previamente las constantes K_1 y K_2 en rocas que se caracterizan por su grado de diaclasamiento y alteración.

5 REFERENCIAS

- Bieniawski, T (1989). *Engineering rock mechanics classifications*, John Wiley & Sons, 251p
- Barton, N. (2002) *Some New Q-value correlations to assist in site characterization and tunnel design*, International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, Vol 39, No2, pp185-216
- Hoek, E y Brown, T, (1989). *The Hoek-Brown failure criterion-a 1988 updated in Rock engineering for undergrounds excavations*, pro.15th Canadian rock mech.symp (ed.J.C. Curran), 31-38. Toronto: Dept.Civil. Engineering, University of Toronto.
- Ramamurthy, T (1986) *Stability of rock mass*, Indian Geotech. J, Vol 16, No1,74p
- Yu, MH (2003) *Unified strength theory and its applications*, Springer, 412p
- Shory, P (1997). *Empirical rock Failure Criteria*, A.A. Balkema, 176p
- Andreev, G (1995) *Brittle failure of rocks materials*. A.A. Balkema, 446p
- Torres, R (1992) *Nuevos criterios sobre la resistencia del concreto* Tesis de Maestría, Facultad de Ingeniería, Universidad de Los Andes, 160p más anexos