

Una solución directa al problema de interacción suelo-estructura

G. López-Rincón, C. Zea-Constantino y R. Rivera-Constantino
Departamento de Geotecnia, F. I, UNAM, México, D.F., México



ABSTRACT

The method here presented is an improvement of the Soil-Structure Interaction Method combining the rigid matrix of soil with the corresponding matrix of structure, to solve, simultaneously, the soil reaction distribution and the mechanic elements of the structure. It follows the well known Zeevaert's lineaments (1973) of soil's behavior as well as Sánchez and Enríquez's (1981) and Demeneghi's developments (1995) using, in this case, the Damy-Casales' solution (1981) for calculus of stress distribution in the soil mass. It shows a numeric example that makes the method easy to understand, concluding that the advance obtained results more rational than previously proposed methods, besides it's easy to program, reducing the computing time versus that utilized with the iterative method.

RESUMEN

Se presenta un Método Mejorado de Interacción Estática Suelo-Estructura, combinando la matriz de rigidez del suelo con la de la estructura para resolver en forma simultánea la distribución de reacciones del suelo y los elementos mecánicos en la estructura. Se siguen los lineamientos del comportamiento del suelo establecidos por Zeevaert (1973), así como los desarrollos de Sánchez y Enríquez (1982) y Demeneghi (1995), aprovechando, en este caso, la solución Damy-Casales (1981) y otras soluciones, para el cálculo de la distribución de esfuerzos en la masa del suelo. Se muestra un ejemplo numérico que simplifica el uso del método, concluyéndose que el avance logrado resulta más racional que los anteriormente propuestos, además de que es fácilmente programable, reduciéndose el tiempo de cómputo comparado con el que se requiere al utilizar el método iterativo.

1 INTRODUCCIÓN

Durante varias décadas diferentes investigadores, interesados en el análisis y diseño estructural, han abordado el problema de modelar la estructura y su cimentación en conjunto, con el objetivo de representar, lo más apegado a la realidad, el comportamiento cimentación-superestructura.

La manera en que se ha tratado de resolver el problema ha sido variada y uno de los métodos más frecuentemente utilizados es el de modelar al subsuelo como una serie de resortes independientes o interdependientes, cuyos valores dependen de las propiedades mecánicas del suelo de apoyo.

Si los resortes se consideran independientes uno de otro, entonces el problema de la interacción suelo-estructura se puede resolver en un solo paso, tal como sucede con el modelo de Winkler (1867) o Hetenyi (1964).

En la solución que se presenta en este trabajo se modela el suelo como una serie de resortes interdependientes, siguiendo la metodología desarrollada por Zeevaert(1973 y 1980), pero en vez de abordar el problema mediante el método de las flexibilidades, se aborda desarrollando las matrices de rigidez tanto de la estructura y su cimentación como del subsuelo, sumándolas en sus correspondientes grados de libertad, lo que permite resolver el problema en un solo paso sin recurrir a las, a veces, "engorrosas" iteraciones.

La metodología que se expone si bien no es nueva, tiene un ingrediente atractivo que es, el que pueden

analizarse estructuras reticulares tridimensionales, con la única restricción de la capacidad de memoria de la computadora que se utilice para el cálculo, además de que toma en cuenta los seis grados de libertad de los nudos de la estructura. Si uno o varios de los nudos de la estructura o de la cimentación tienen alguna restricción, podrá tomarse esto en cuenta al resolver el sistema de ecuaciones que plantea el método. De esta manera se obtienen, en un solo paso, los desplazamientos y giros de los nudos de la estructura y los elementos mecánicos en sus miembros, así como los desplazamientos verticales del subsuelo de apoyo y la distribución de reacciones, compatible con dichos desplazamientos.

El método que aquí se expone no está restringido únicamente al caso de cargas estáticas, puede extenderse para analizar casos de carga dinámica, como por ejemplo al estudiar el comportamiento del sistema cimentación-estructura bajo sismo o al caso de cimentación de maquinaria, haciendo las consideraciones correspondientes respecto a las propiedades mecánicas dinámicas del subsuelo.

2 ANÁLISIS DE LA ESTRUCTURA

Para resolver el problema estructural, conviene idealizar el suelo de apoyo de la cimentación mediante resortes (Figura 2.1), cuya constante elástica se debe determinar (en el siguiente inciso se explica cómo hacer esa determinación).

La modelación de la cimentación se logra transformándola en una malla (Figura 2.2) o retícula de barras con propiedades equivalentes a la cimentación real. Los nudos de esta malla tendrán, por lo tanto, seis grados de libertad a saber: giros alrededor de los ejes "X, Y y Z" y desplazamientos también en las tres direcciones.

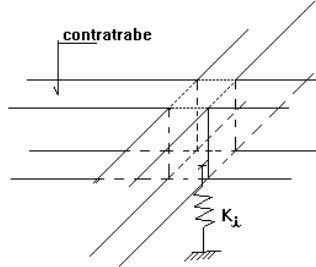


Figure 2.1. Modelo físico para representar el suelo

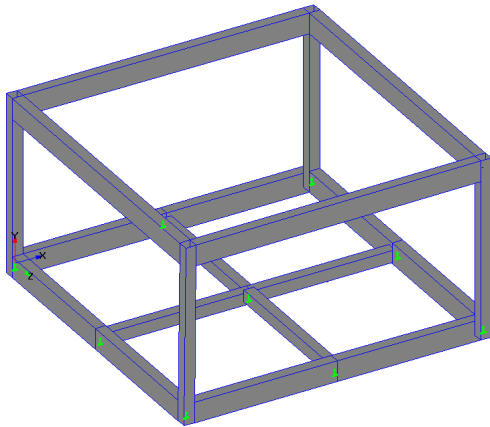


Fig. 2.2 Modelación de la estructura y cimentación mediante barras y nudos

En este modelo, la resistencia al desplazamiento de los nudos, se deberá tanto a la rigidez de las barras de la estructura como a las constantes de los resortes que modelan el suelo. La resistencia al giro depende únicamente de la rigidez de las barras.

El equilibrio del modelo físico así planteado conduce a un sistema con 6N ecuaciones (donde N= número de nudos), con el mismo número de incógnitas (los desplazamientos y giros de los nudos), el cual se representa con la siguiente expresión matricial:

$$([K'_e] + [K'_s])\{\delta'\} + \{F'_{it}\} = \{F'_{et}\} \quad [2.1]$$

donde:

[K'_e] Matriz de rigidez del sistema estructura-cimentación

[K'_s] Matriz de rigidez del sistema interdependiente de resortes del suelo

{\delta'} Vector de desplazamientos y giros de los nudos.

{F'_{it}} Vector de fuerzas internas o de empotramiento.

{F'_{et}} Vector de fuerzas externas.

La matriz de rigidez correspondiente a una barra sin resortes, definida por sus nudos "origen" y "destino" y con seis grados de libertad, es:

$$[K_{ei}] = \begin{bmatrix} [K_{aa}] & [K_{ab}] \\ [K_{ba}] & [K_{bb}] \end{bmatrix}_i \quad [2.2]$$

donde:

$$[K_{aa}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix}$$

$$[K_{ab}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} \end{bmatrix}$$

$$[K_{ba}] = [K_{ab}]$$

$$[K_{bb}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez anterior corresponde a un sistema local de ejes coordenados. Si el sistema general (global) de referencia no es paralelo al local de la barra, se realiza una transformación de ejes, mediante la expresión:

$$[K_{ei}] = [T_{oi}^T][K_{ei}][T_{oi}] \quad [2.3]$$

donde:

$[K_{ei}]$ Matriz de rigidez de una barra en el sistema global.

$[T_{oi}]$ Matriz de transformación de ejes, o sea:

$$[T_{oi}] = \begin{bmatrix} [T] & M[0] \\ [0] & M[T] \end{bmatrix}_i \quad [T_{oi}] = \begin{bmatrix} [T] & M[0] \\ [0] & M[T] \end{bmatrix}_i \quad [2.4]$$

donde:

$$[T] = \begin{bmatrix} l_x & m_x & n_x & 0 & 0 & 0 \\ l_y & m_y & n_y & 0 & 0 & 0 \\ l_z & m_z & n_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_x & m_x & n_x \\ 0 & 0 & 0 & l_y & m_y & n_y \\ 0 & 0 & 0 & l_z & m_z & n_z \end{bmatrix}$$

"l, m y n", son las proyecciones de las direcciones locales de las barras sobre las direcciones globales (Figura 2.3).

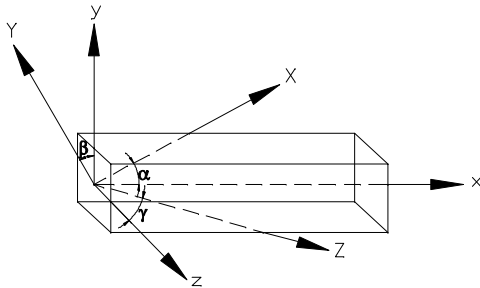


Fig. 2.3 Sistemas de referencia local y global para las barras de la retícula

Por su parte $[K'_s]$ puede obtenerse al invertir la matriz de flexibilidades del suelo cuya determinación se ve más adelante.

Por otro lado, las fuerzas internas o de empotramiento se deben a fuerza axial, cortantes y momentos flexionantes y torsionantes provocados por descargas no aplicadas directamente en los nudos. El vector de fuerzas de empotramiento se obtiene mediante el "ensamble" de los vectores de fuerzas de empotramiento correspondiente a cada una de las barras.

Para una barra con nudos "i" y "j", en el sistema local se tiene:

$$\{F_{it}\} = \{F_{xi} \ F_{yi} \ F_{zi} \ M_{xi} \ M_{yi} \ M_{zi} \ F_{xj} \ F_{yj} \ F_{zj} \ M_{xj} \ M_{yj} \ M_{zj}\}^T$$

En el sistema global:

$$\{\bar{F}'_{it}\} = [T_o^T] \{F_{it}\} \quad [2.5]$$

Finalmente, el vector de fuerzas externas $\{F'_{oit}\}$ se construye con las fuerzas y momentos puntuales aplicados directamente en los nudos de la retícula.

Al sistema 2.1 se le da el nombre de "Ecuación Matricial de Interacción" (EMI).

3 ANÁLISIS DEL SUELO

El suelo se modela como un medio continuo representado por una serie de resortes elásticos de rigidez K_i , interrelacionados entre sí, mientras que la cimentación se discretiza mediante un número finito "n" de dovelas o placas de área a_i .

El cálculo de los módulos de reacción o constantes de resorte equivalentes del subsuelo se puede realizar de manera aproximada por medio del análisis de interacción suelo-cimentación, resolviendo la siguiente ecuación denominada EMA (Zeevaert 1980 y 1983):

$$\{\delta_i\} = [\bar{\delta}_{ji}] \cdot \{q_i\} \quad [3.1]$$

En donde:

$\{\delta_i\}$: Vector de desplazamientos.

$[\bar{\delta}_{ji}]$: Matriz de desplazamientos por carga unitaria.

$\{q_i\}$: Vector de cargas, correspondiente a la presión de contacto en el área tributaria a_i .

Cada uno de los renglones de la matriz $[\bar{\delta}_{ji}]$ se puede calcular como:

$$\{\bar{\delta}_{ji}\} = [I_{ji}]^T \cdot \{\alpha_n\} \quad [3.2]$$

Siendo:

$[I_{ji}]$: Matriz de influencias por carga unitaria aplicada en el área i y

$\{\alpha_n\}$: Vector de compresibilidades para los diferentes estratos de suelo involucrados en el análisis.

La ecuación 3.1 puede escribirse como:

$$\{\delta_i\} = [\bar{\delta}_{ji}] \left[\frac{1}{a_i} \right] \cdot \{R_i\} \quad [3.3]$$

O sea:

$$\{\delta_i\} = [F_{ji}] \cdot \{R_i\} \quad [3.4]$$

Siendo:

$\begin{bmatrix} 1 \\ a_i \end{bmatrix}$: Matriz diagonal de áreas tributarias.

$\{R_i\}$: Vector de reacciones en las placas y

$[F_{ji}] = \begin{bmatrix} \bar{\delta}_{ji} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_i \end{bmatrix}$: Matriz de flexibilidades del suelo.

De la ecuación 3.4 resulta la siguiente expresión:

$$\{R_i\} = [K'_s] \cdot \{\delta_i\} \quad [3.5]$$

Siendo:

$[K'_s] = [F_{ji}]^{-1}$: Matriz de rigidez de los resortes, que representa la deformabilidad del suelo.

Si los resortes que representan la deformabilidad del suelo en las diferentes placas no se ubican en el centroide de cada placa (como lo establece el método de Zeevaert, 1973 y 1980) sino en los nudos donde estarán ubicados en el modelo de análisis estructural, la matriz de la ecuación 3.5 se puede "ensamblar" con la matriz de la ecuación 2.1, resultando:

$$[K_e^T] = [K'_e] + [K'_s] \quad [3.6]$$

Finalmente, aplicando la ecuación 2.1, se forma el sistema de ecuaciones que permite calcular los desplazamientos y giros de los nudos de la estructura.

Si se tienen restricciones, al desplazamiento o giro, en uno o varios nudos pueden, en este momento, hacerse los ajustes para eliminar los renglones y columnas correspondientes a las restricciones.

Los desplazamientos y giros obtenidos, producto de la solución al sistema de ecuaciones, permiten calcular los elementos mecánicos en los extremos de las barras de la estructura, previa transformación de los primeros al sistema de ejes local de cada miembro, mediante las ecuaciones siguientes, respectivamente:

$$\{\delta_i\} = [T_{oi}] \{\delta'_i\} \quad [3.7]$$

$$\{F_i\} = [K_e] \{\delta_i\} + \{F_{it}\} \quad [3.8]$$

Las reacciones en los apoyos y, por tanto, las reacciones distribuidas bajo cada una de las dovelas se obtienen aplicando la siguiente ecuación:

$$\{q_i\} = [K_s] \{\delta_{vi}\} \cdot \left\{ \frac{1}{a_i} \right\} \quad [3.9]$$

En este caso $\{\delta_{vi}\}$ representa los desplazamientos verticales de los nudos de la cimentación y $\{1/a_i\}$ el vector de áreas tributarias.

4 EJEMPLO DE CÁLCULO

Para ilustrar el procedimiento se tomó el ejemplo de Demeneghi(1982), que consiste en una cimentación representada por una retícula de traves que soporta una estructura de 4 columnas y una losa, apoyada en 4 traves perimetrales (Figura 4.1).

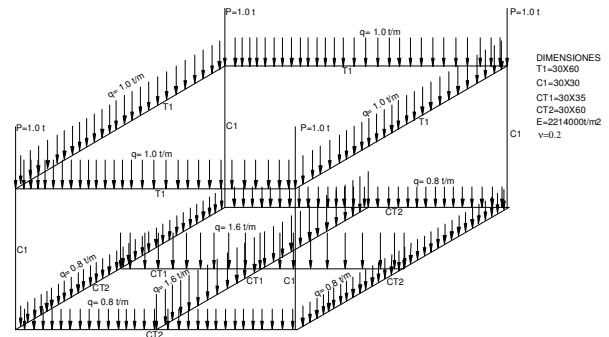


Fig. 4.1 Características de la estructura ejemplo

En cuanto al subsuelo, sus características son las siguientes (Figura 4.2):

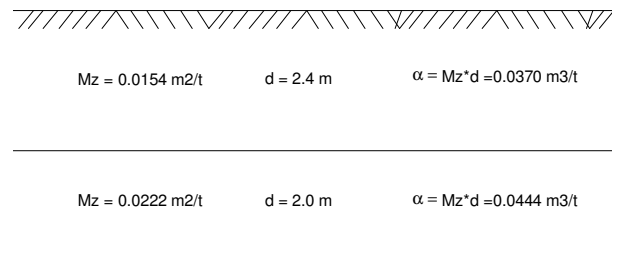


Fig. 4.2 Características del suelo de apoyo

La estructura consta de 13 nudos y 20 elementos (figura 4.3) por lo que, tomando en cuenta los seis grados de libertad por nudo se tendrá un sistema de 78 ecuaciones.

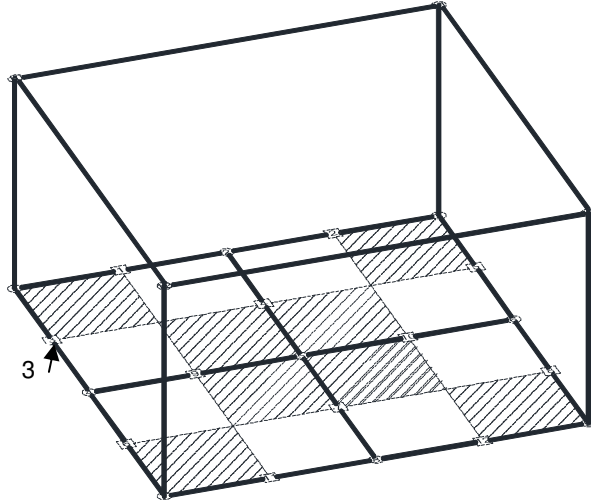


Fig. 4.3 Modelo estructural

Para ilustrar el uso de las ecuaciones 2.2, 2.3 y 2.4, en las tablas que siguen se muestra la matriz de rigidez del elemento 3, tanto en coordenadas locales como en coordenadas globales, utilizando la matriz de transformación y, finalmente la matriz de rigidez global de la estructura de la que, por razones de espacio, solo se muestra una parte de la esquina superior izquierda.

Tabla 1. Matriz de rigidez local del elemento 3.

| ELEMENTO No. 3, GRADOS DE LIBERTAD CORRESPONDIENTES | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|-----------|-----------|----------|---------|----------|-----------|-----------|-----------|----------|-------|----------|-----------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 9862.090 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | -9862.090 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | | | | | | | | | | | | |
| 2 | 0.000 | 1804.129 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 3878.878 | 0.000 | -1804.129 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 3878.878 | | | | | | | | | | | | |
| 3 | 0.000 | 0.000 | 451032 | 0.000 | -969.720 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | -451032 | 0.000 | -969.720 | 0.000 | | | | | | | | | | | | |
| 4 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 795319 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | -795319 | 0.000 | | | | | | | | | | | | |
| 5 | 0.000 | 0.000 | -969.720 | 0.000 | 2779.863 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 969.720 | 0.000 | 1899.931 | 0.000 | | | | | | | | | | | | |
| 6 | 0.000 | 3878.878 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 1119.451 | 0.000 | -3878.878 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 5593.725 | | | | | | | | | | | | |
| 19 | -9862.090 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 9862.090 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | | | | | | | | | | | | |
| 20 | 0.000 | -1804.129 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | -3878.878 | 0.000 | 1804.129 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | -3878.878 | | | | | | | | | | | | |
| 21 | 0.000 | 0.000 | -451032 | 0.000 | 969.720 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 451032 | 0.000 | -969.720 | 0.000 | | | | | | | | | | | | |
| 22 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | -795319 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 795319 | 0.000 | | | | | | | | | | | | |
| 23 | 0.000 | 0.000 | -969.720 | 0.000 | 1899.931 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | -969.720 | 0.000 | 2779.863 | 0.000 | | | | | | | | | | | | |
| 24 | 0.000 | 3878.878 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 5593.725 | 0.000 | -3878.878 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 1119.451 | | | | | | | | | | | | |

Tabla 2. Matriz de transformación [T_o] del elemento 3.

| ELEMENTO No. 3, MATRIZ DE TRANSFORMACIÓN | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--|----|---|---|---|---|---|---|----|---|----|---|---|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | | | | | | | | | |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | | | | | | | | | |
| 3 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | | | | | | | | | |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | | | | | | | | | |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | | | | | | | | | |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | | | | | | | | | | | | |
| 19 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | | | | | | | | | | | | |
| 20 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | | | | | | | | | |
| 21 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | | | | | | | | | |
| 22 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | | | | | | | | | |
| 23 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | | | | | | | | | | | | |
| 24 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | | | | | | | | | | | | |

Tabla 3. Matriz de rigidez global del elemento 3.

| ELEMENTO No. 3, MATRIZ DE RIGIDEZ EN COORDENADAS GLOBALES | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---------|-----------|-----------|----------------|----------------|----------------|----------|-----------|-----------|----------------|----------------|----------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | x1 | y1 | z1 | θ ₁ | θ ₂ | θ ₃ | x2 | y2 | z2 | θ ₄ | θ ₅ | θ ₆ | | | | | | | | | | | | |
| x1 | 451032 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 969.720 | 0.000 | -451032 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 969.720 | 0.000 | | | | | | | | | | | | |
| y1 | 0.000 | 1804.129 | 0.000 | -3878.878 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | -1804.129 | 0.000 | -3878.878 | 0.000 | 0.000 | | | | | | | | | | | | |
| z1 | 0.000 | 0.000 | 9862.090 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | -9862.090 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | | | | | | | | | | | | |
| θ ₁ | 0.000 | -3878.878 | 0.000 | 1119.451 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 3878.878 | 0.000 | 5593.725 | 0.000 | 0.000 | | | | | | | | | | | | |
| θ ₂ | 969.720 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 2779.863 | 0.000 | -969.720 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 1899.931 | 0.000 | | | | | | | | | | | | |
| θ ₃ | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 795319 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | -795319 | | | | | | | | | | | | |
| x2 | -451032 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | -969.720 | 0.000 | 451032 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | -969.720 | 0.000 | | | | | | | | | | | | |
| y2 | 0.000 | -1804.129 | 0.000 | 3878.878 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 1804.129 | 0.000 | 3878.878 | 0.000 | 0.000 | | | | | | | | | | | | |
| z2 | 0.000 | 0.000 | -9862.090 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 9862.090 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | | | | | | | | | | | | |
| θ ₄ | 0.000 | -3878.878 | 0.000 | 5593.725 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 3878.878 | 0.000 | 1119.451 | 0.000 | 0.000 | | | | | | | | | | | | |
| θ ₅ | 969.720 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 1899.931 | 0.000 | -969.720 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 2779.863 | 0.000 | | | | | | | | | | | | |
| θ ₆ | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | -795319 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 795319 | | | | | | | | | | | | |

Tabla 4. Matriz de rigidez [K_e] de la estructura de los primeros 10 grados de libertad.

| Gdo de lib | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1 | 93314.43 | 0 | 0 | 0 | 0 | 969.8972 | -423.757 | -92679.1 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 46926.31 | 0 | -3879.59 | 0 | 3879.589 | 0 | -1804.46 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 93314.43 | 423.7571 | -969.897 | 0 | 0 | 0 | -451.115 | 0 |
| 4 | 0 | -3879.59 | 423.7571 | 13216.5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -795.495 |
| 5 | 969.8972 | 0 | -969.897 | 0 | 5789.564 | 0 | 0 | 0 | 969.8972 | 0 |
| 6 | -423.757 | 3879.589 | 0 | 0 | 0 | 13216.5 | 0 | -3879.59 | 0 | 0 |
| 7 | -92679.1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 185621.5 | 0 | 0 | 0 |
| 8 | 0 | -1804.46 | 0 | 0 | 0 | -3879.59 | 0 | 3967.138 | 0 | -770.17 |
| 9 | 0 | 0 | -451.115 | 0 | 969.8972 | 0 | 0 | 0 | 54965.02 | 0 |
| 10 | 0 | 0 | 0 | -795.495 | 0 | 0 | 0 | -770.17 | 0 | 3798.812 |

Para obtener la matriz de rigidez del subsuelo de apoyo se dividió la cimentación en 9 áreas (Figura 4.3), correspondientes a los 9 nudos que forman la red de cimentación con la misma numeración que éstos. Aplicando sucesivamente la ecuación 3.2 se calcularon los vectores de deformación del suelo, bajo cada nudo de la cimentación, debido a cargas unitarias aplicadas en cada una de las 9 áreas tributarias. La matriz de influencias [I_{ij}] se calculó utilizando la solución Damy-Casales (1981) para χ=3. En las tablas que siguen se muestran, como ejemplo, la matriz de influencias debida al área 2, el vector de deformaciones {δ_{ij}}, la matriz de desplazamientos por carga unitaria [F_{ij}] y, finalmente, la matriz de rigidez del subsuelo [K_s], obtenida al invertir la matriz de flexibilidades.

Tabla 5. Matriz de influencias del área 2

| PROF | INFLUENCIAS DE LA CARGA EN CADA UNO DE LOS NUDOS DE LA CIMENTACIÓN | | | | | | | | |
|------|--|-----------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| m | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 1.2 | 0.00397619 | 0.4542207 | 0.00397619 | 0.00242976 | 0.01716995 | 0.00242976 | 0.0001625 | 0.00030559 | 0.0001625 |
| 3.4 | 0.0410836 | 0.2277626 | 0.0410836 | 0.02071648 | 0.07148988 | 0.02071648 | 0.00263806 | 0.00456731 | 0.00263806 |

Tabla 6. Vector de deformaciones por carga unitaria debido al área 2.

| | | | | | | | | | |
|--------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| {δ _{ij} } | 0.002303 | 0.026901 | 0.002303 | 0.001010 | 0.003809 | 0.001010 | 0.000123 | 0.000214 | 0.000123 |
|--------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|

Tabla 7. Matriz de desplazamientos del suelo por carga unitaria {δ_{ij}}.

| MATRIZ DE FLEXIBILIDADES DEL SUELO | | | | | | | | | |
|------------------------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| | δ _{v1} | δ _{v2} | δ _{v3} | δ _{v4} | δ _{v5} | δ _{v6} | δ _{v7} | δ _{v8} | δ _{v9} |
| δ _{v1} | 0.01345 | 0.00230 | 0.00011 | 0.00230 | 0.00135 | 0.00012 | 0.00011 | 0.00012 | 0.00002 |
| δ _{v2} | 0.00190 | 0.02690 | 0.00190 | 0.00101 | 0.00461 | 0.00101 | 0.00008 | 0.00021 | 0.00008 |
| δ _{v3} | 0.00011 | 0.00230 | 0.01345 | 0.00012 | 0.00135 | 0.00230 | 0.00002 | 0.00012 | 0.00011 |
| δ _{v4} | 0.00190 | 0.00101 | 0.00008 | 0.02690 | 0.00461 | 0.00021 | 0.00190 | 0.00101 | 0.00008 |
| δ _{v5} | 0.00077 | 0.00381 | 0.00077 | 0.00381 | 0.05380 | 0.00381 | 0.00077 | 0.00381 | 0.00077 |
| δ _{v6} | 0.00008 | 0.00101 | 0.00190 | 0.00021 | 0.00461 | 0.02690 | 0.00008 | 0.00101 | 0.00190 |
| δ _{v7} | 0.00011 | 0.00012 | 0.00002 | 0.00230 | 0.00135 | 0.00012 | 0.01345 | 0.00230 | 0.00011 |
| δ _{v8} | 0.00008 | 0.00021 | 0.00008 | 0.00101 | 0.00461 | 0.00101 | 0.00190 | 0.02690 | 0.00190 |
| δ _{v9} | 0.00002 | 0.00012 | 0.00011 | 0.00012 | 0.00135 | 0.00230 | 0.00011 | 0.00230 | 0.01345 |

Tabla 8. Matriz de flexibilidades del suelo [F_{ij}].

| MATRIZ DE FLEXIBILIDADES DEL SUELO | | | | | | | | | |
|------------------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| | y1 | y2 | y3 | y4 | y5 | y6 | y7 | y8 | y9 |
| y1 | 0.00291 | 0.00025 | 0.00002 | 0.00025 | 0.00007 | 0.00001 | 0.00002 | 0.00001 | 0.00001 |
| y2 | 0.00041 | 0.00291 | 0.00041 | 0.00011 | 0.00025 | 0.00011 | 0.00002 | 0.00002 | 0.00002 |
| y3 | 0.00002 | 0.00025 | 0.00291 | 0.00001 | 0.00007 | 0.00025 | 0.00001 | 0.00001 | 0.00002 |
| y4 | 0.00041 | 0.00011 | 0.00002 | 0.00291 | 0.00025 | 0.00002 | 0.00041 | 0.00011 | 0.00002 |
| y5 | 0.00017 | 0.00041 | 0.00017 | 0.00041 | 0.00291 | 0.00041 | 0.00017 | 0.00041 | 0.00017 |
| y6 | 0.00002 | 0.00011 | 0.00002 | 0.00002 | 0.00025 | 0.00291 | 0.00002 | 0.00011 | 0.00041 |
| y7 | 0.00002 | 0.00001 | 0.00001 | 0.00025 | 0.00007 | 0.00001 | 0.00291 | 0.00025 | 0.00002 |
| y8 | 0.00002 | 0.00002 | 0.00002 | 0.00011 | 0.00025 | 0.00011 | 0.00041 | 0.00291 | 0.00041 |
| y9 | 0.00001 | 0.00001 | 0.00002 | 0.00001 | 0.00007 | 0.00025 | 0.00002 | 0.00025 | 0.00291 |

Tabla No. 9 Matriz de rigidez del suelo [K_s].

| Matriz de rigidez del suelo con sus correspondientes grados de libertad dentro de la matriz de rigidez suelo-estructura | | | | | | | | | | |
|---|-------------|-------------|--------------|-------------|-------------|--------------|-------------|--------------|-------------|--|
| Gib. de lib. | 2 | 8 | 14 | 20 | 26 | 32 | 38 | 44 | 50 | |
| 2 | 351.970882 | -28.676685 | 1.68126351 | -28.676685 | -4.09882809 | 0.12515609 | 1.68126351 | 0.12515604 | -0.12386241 | |
| 8 | -47.708823 | 356.003883 | -47.708823 | -5.25714898 | -27.3622382 | -5.25714898 | 0.48946689 | 1.78707339 | 0.48946689 | |
| 14 | 1.68126349 | -28.676686 | 351.970894 | 0.12516231 | -4.09882834 | -28.676686 | -0.12386208 | 0.12514857 | 1.68130802 | |
| 20 | -47.7088109 | -5.25714894 | 0.48946685 | 356.003896 | -27.3622361 | 1.78707332 | -47.7088884 | -5.25711762 | 0.48942472 | |
| 26 | -7.00427808 | -6.9103757 | -7.00427873 | -6.91037475 | 360.105119 | -6.91037803 | -7.00427554 | -6.91038654 | -7.00427085 | |
| 32 | 0.48946654 | -5.25714233 | -47.70881572 | 1.78707277 | -27.3622374 | 356.003966 | 0.48946688 | -5.25711765 | -47.7088937 | |
| 38 | 1.68125801 | 0.125164851 | -0.12388867 | -28.6766826 | -4.09884085 | 0.125154803 | 351.9708952 | -28.67668573 | 1.68130489 | |
| 44 | 0.48946607 | 1.78707284 | 0.48946619 | -5.25714249 | -27.3622382 | -5.257118472 | -47.7088446 | 356.003964 | -47.7088402 | |
| 50 | -0.12386241 | 0.125158471 | 1.68130972 | 0.125156017 | -4.09883812 | -28.6766846 | 1.68130647 | -28.6766846 | 351.970888 | |

Por lo que se refiere al vector de fuerzas de empotramiento $\{F'_{ei}\}$, éste se forma con los vectores $\{F_{ij}\}$ de cada uno de los elementos de la estructura, ensamblándolos de acuerdo a los grados de libertad que le corresponden según el nudo origen (i) y nudo destino (j) y aplicando la ecuación 2.5. Como ejemplo en las tablas siguientes se muestra el caso del elemento 3.

Tabla 10. Fuerzas de empotramiento del elemento 3 en el sistema local de coordenadas.

| $\{F_{3i}\}$ | Nodo origen (1) | | | | | | Nodo destino (4) | | | | | |
|--------------|-----------------|------|-----|-----|-----|-------|------------------|------|-----|-----|-----|--------|
| | Fxi | Fyi | Fzi | Mxi | Myi | Mzi | Fxj | Fyj | Fzj | Mxj | Myj | Mzj |
| | 0 | 1.72 | 0 | 0 | 0 | 1.233 | 0 | 1.72 | 0 | 0 | 0 | -1.233 |

Tabla 11. Fuerzas de empotramiento del elemento 3 en el sistema global de coordenadas.

| $\{F'_{3i}\}$ | Grados de libertad para el elemento No. 3 | | | | | | | | | | | |
|---------------|---|------|---|--------|---|---|----|------|----|-------|----|----|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| | 0 | 1.72 | 0 | -1.233 | 0 | 0 | 0 | 1.72 | 0 | 1.233 | 0 | 0 |

El vector $\{F'_{ei}\}$, como se indica en el inciso 2, se forma con las fuerzas y momentos aplicados directamente en los nudos de la estructura, por lo que no requiere transformación alguna.

Finalmente, con la información anterior puede formarse la ecuación matricial 2.1 que, para el ejemplo que aquí se expone, es un sistema de 78 ecuaciones.

Resolviendo el sistema se obtienen los desplazamientos y giros de los nudos de la estructura que por razones de espacio no se muestran; sin embargo, sí se muestran los resultados para el elemento 3, esto es:

Tabla 12. Desplazamientos y giros en coord. Globales.

| δ_{i2} | δ_{i1} | θ_{i2} | θ_{i1} | θ_{i1} | δ_{i4} | δ_{i4} | δ_{i4} | θ_{i4} | θ_{i4} | θ_{i4} |
|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| -4.0853E-02 | -7.7115E-06 | 0.0002301 | -1.7652E-13 | -0.0002301 | -1.2702E-07 | -0.04115846 | 1.9391E-08 | -2.4504E-10 | 4.8159E-12 | -0.00247008 |

y aplicando la ecuación 3.7:

Tabla 13. desplazamientos y giros en coord. Locales.

| δ_{i2} | δ_{i2} | δ_{i2} | θ_{i1} | θ_{i2} | θ_{i2} | δ_{i4} | δ_{i4} | δ_{i4} | θ_{i4} | θ_{i4} | θ_{i4} |
|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| -7.7115E-06 | -0.04095345 | 7.731E-06 | -0.0002301 | -1.7652E-13 | -0.0002301 | 1.9391E-08 | -0.04115846 | 1.2702E-07 | -0.00247008 | 4.8159E-12 | 2.4504E-10 |

con la ecuación 3.8:

Tabla 14. Elementos mecánicos de barra 3.

| F_{i1} | F_{i2} | F_{i3} | $M_{i1}(t-m)$ | M_{i2} | M_{i3} | F_{i4} | F_{i5} | F_{i6} | M_{i4} | M_{i5} | M_{i6} |
|----------|----------|----------|---------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| -0.716 | 1.197 | 0.003 | 0.549 | -0.007 | -1.763 | 0.716 | 2.243 | -0.003 | -0.549 | -0.007 | -0.484 |

Finalmente, aplicando la ecuación 3.9, la distribución de reacciones bajo la cimentación es:

Tabla 15. Distribución de reacciones bajo la cimentación.

| dovela | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| qj (t/m ²) | -2.595 | -0.981 | -2.595 | -0.981 | -0.496 | -0.981 | -2.595 | -0.981 | -2.595 |

A continuación se comparan, en la siguiente tabla, los desplazamientos verticales de la cimentación, calculados con el método que aquí se expone, con un método iterativo.

Tabla 16. comparación de desplazamientos entre ise-3D y el método iterativo.

| Nudo | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|----------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| ise-3D(m) | -0.0409 | -0.0411 | -0.0409 | -0.0412 | -0.0497 | -0.0411 | -0.0412 | -0.0413 | -0.0410 |
| iteraciones(5) | -0.0410 | -0.0412 | -0.0410 | -0.0412 | -0.0497 | -0.0412 | -0.0410 | -0.0412 | -0.0410 |

5. CONCLUSIONES

Se propone un procedimiento para el análisis de interacción suelo-cimentación-superestructura tomando como base el método de Zeevaert, pero empleando las matrices de rigidez tanto de la estructura como del suelo, lo que permite desarrollar la interacción sin necesidad de iteraciones, resolviendo el problema en un solo paso.

Los algoritmos resultantes del método pueden ser programados utilizando alguno de los lenguajes de programación existentes; en particular se desarrolló un programa de computadora en "QBASIC" el cuál se está transformando al lenguaje "FORTRAN", para darle mayor capacidad de análisis. Hasta el momento solamente se pueden analizar estructuras reticulares; sin embargo, por la estructura modular que se le está dando al programa, en el futuro podrán incluirse otro tipo de elementos estructurales como por ejemplo elementos tipo placa (shells).

Aún cuando el enfoque que se plantea en este artículo no es nuevo, la propuesta constituye un avance en este campo del Análisis de la Interacción Suelo-Estructura. El uso de soluciones teóricas recientes, como es el caso de la distribución de esfuerzos bajo áreas poligonales le dan un gran potencial al método propuesto.

5 AGRADECIMIENTOS

Los autores expresan su agradecimiento a las autoridades de la División de Ingenierías Civil y Geomática de la Facultad de Ingeniería de la UNAM, por las facilidades brindadas para el desarrollo de este trabajo.

6 REFERENCIAS

Damy, J., y Casales, C., 1981. Integración de las ecuaciones de Boussinesq, Westergaard y Frolich sobre superficies poligonales. *Revista Ingeniería, UNAM*.

Deméngi, A. 1995. Método de interacción tridimensional suelo-estructura. *X Congreso Paramericano de Mecánica de Suelos e Ingeniería de Cimentaciones*. Guadalajara, Jal. México.

Sánchez, J.L. y Enríquez, P. 1982. Un método de interacción suelo estructura. *Congreso Nacional de Ingeniería Estructural*. Morelia, Mich. México.

Zeevaert, L. 1973. *Foundation Engineering for Difficult Subsoil Conditions*. Ed. Van Nostrand Reinhold Co. New York.

Zeevaert, L. 1980. *Interacción Suelo-Estructura de Cimentación*. Ed. Limusa, México.