Movimientos efectivos debidos a la interacción cinemática

L. E. Pérez Rocha
Instituto de Investigaciones Eléctricas, México
J. Avilés López
Instituto Mexicano de Tecnología del Agua, México

ABSTRACT
A boundary method to analyze the kinematic soil-foundation interaction, considering the flexibility of the foundation and the translation-rotation of its base, is presented in this work. The model consists in a floating flexible cylinder buried in a soil deposit with rigid base, forming three regions: one interior with the bottom slab and the supporting soil, other at the center with the retaining wall and the supporting soil and another outside with the surrounding soil. For each region, displacements and forces are expressed by means of superposition of wave modes traveling horizontally. Later, boundary conditions in the interfaces between the regions, given by the compatibility of displacements and forces in the elastic boundaries and null forces at the internal face of the foundation, are imposed. Vertical incidence of shear waves is considered as excitation of the system. Wave modes of both regions are computed with the thin layer method, in such a way that the solution is discreet in the vertical direction and continuous in the horizontal one. The effects of the thickness of the layer and the deep buried of a foundation with thin wall in the effective motion in the base of the foundation, these are horizontal translation and rotation.

RESUMEN
En este trabajo se presenta un método de frontera para análisis de interacción cinemática suelo-cimiento, considerando la flexibilidad de la cimentación y la traslación-rotación de su base. El modelo consiste en un cilindro flexible flotante, de pared delgada, enterrado en un depósito de suelo con base rígida, formando tres regiones: una interior con la losa de fondo del cajón de cimentación y el suelo de soporte, una central formada por el muro anular y el suelo de soporte y otra exterior con el suelo circundante. Para cada región, los desplazamientos y fuerzas se expresan mediante superposición de modos de ondas que viajan horizontalmente. Posteriormente se imponen las condiciones de frontera en las interfaces entre las regiones, dadas por la compatibilidad de desplazamientos y fuerzas en las fronteras elásticas, y fuerzas nulas en la cara interior del fuste, que es superficie libre. Como excitación del sistema se considera la incidencia vertical de ondas de cortante. Los modos de ondas en las dos regiones se calculan con el método del estrato delgado, de suerte que la solución es discreta en la dirección vertical y continua en la horizontal. Se muestra el efecto que tiene el espesor del estrato y la profundidad de enterramiento de una cimentación de pared delgada en los movimientos efectivos en la base de cimiento, estos son traslación horizontal y rotación.

1 INTRODUCCIÓN

Durante temblores, las cimentaciones están sujetas a fuerzas de inercia que provienen de la superestructura así como a curvaturas impuestas por las deformaciones del suelo circundante. Usualmente, las pilas se diseñan para soportar sólo las fuerzas de inercia. Sin embargo, observaciones recientes han indicado que el daño en la parte baja de pilas es causado por el movimiento lateral del suelo debido el paso de las ondas sísmicas.

El enfoque de diseño más sencillo es el que ignora la interacción del cimiento con el suelo circundante. Según este enfoque, primero se estiman las deformaciones del terreno en campo libre y luego la cimentación se diseña para acomodarse a estas deformaciones. El resultado es satisfactorio cuando el suelo es mucho más rígido que la cimentación. En caso contrario es necesario considerar los efectos de interacción cinemática, ya que pueden afectar considerablemente las deformaciones circundantes. Estos efectos son debidos a la difracción de las ondas incidentes por la cimentación y hasta la fecha han sido poco estudiados, a diferencia de los efectos de interacción inercial debidos a la vibración de la estructura.

Las soluciones reportadas en la literatura son escasas y limitadas. Destaca por sencilla y atractiva la solución aproximada de Nicolau y col (2001) para pilotes flexibles flotantes, usando un modelo aproximado de viga sobre cimentación elástica de Winkler. La flexibilidad del pilote y la traslación-rotación de su base tienen como efecto una reducción notable de las acciones sísmicas.

En este trabajo se presenta un método de frontera para análisis sísmico de sistemas suelo-cimentación, considerando la flexibilidad y flotación

del cimiento, ya sea cajón o pilote. El modelo consiste de un cilindro elástico, hueco de pared delgada, enterrado en un depósito de suelo con base rígida. El sistema está formando por tres regiones: una interior con la losa del cajón y el suelo de soporte, una central formada por las paredes o fuste de la cimentación y el suelo de soporte, y otra exterior con el suelo circundante. Para cada región, los desplazamientos y fuerzas se expresan mediante superposición de modos de ondas que se propagan horizontalmente. Posteriormente se imponen las condiciones de frontera en las interfaces entre las tres regiones, dadas por la compatibilidad de desplazamientos y fuerzas, y esfuerzos nulos en la pared interior de la cimentación. Como excitación del sistema se considera la incidencia vertical de ondas de cortante. Los modos de ondas en las tres regiones se calculan con el método del estrato delgado, de suerte que la solución es discreta en la dirección vertical y continua en la horizontal.

2 FORMULACION DEL PROBLEMA

Para resolver el problema de interacción suelo-cimiento, el domino en estudio se divide en tres regiones (ver Fig. 1): una interior I ($r \le r_1, H_1 \le z \le H_s$) para la losa de fondo del cimiento y el suelo de soporte, otra central O ($r_1 \le r \le r_2, 0 \le z \le H_s$ para el muro anular y el suelo de soporte, y otra exterior E ($r \ge r_2, 0 \le z \le H_s$) para el suelo circundante, siendo r_1 y r_2 los radios interno y externo del cajón de cimentación y H_s el espesor del depósito de suelo. Para satisfacer las condiciones de compatibilidad en las interfaces entre las tres regiones, se utiliza el método de colocación en puntos nodales. En cada región, los campos de desplazamientos y fuerzas nodales pueden construirse mediante la superposición del campo libre y de un campo difractado, como sigue:

$$\delta_\varepsilon = \delta_\varepsilon^f + \delta_\varepsilon^d = \delta_\varepsilon^f + \Delta_\varepsilon C_\varepsilon, \quad \varepsilon = I, O, E \qquad [1]$$

$$f_\varepsilon = f_\varepsilon^f + f_\varepsilon^d = f_\varepsilon^f + F_\varepsilon C_\varepsilon, \quad \varepsilon = I, O, E \qquad [2]$$

donde:
δ_ε^f =vector de desplazamientos de campo libre en la región ε
f_ε^f =vector de fuerzas de campo libre en la región ε
δ_r^d =vector de desplazamientos difractados en la región ε
f_ε^d = vector de fuerzas difractadas en la región ε
Δ_ε =matriz de desplazamientos modales en la región ε
F_r =matriz de fuerzas modales en la región ε
C_ε =vector de coeficientes de participación en la región ε

2.1 Condiciones de frontera

Para fines de análisis, el domino en estudio se divide en tres subdominios: (1) región interior I ($r \le r_1, H_1 \le z \le H_s$) para la losa de fondo y el suelo de soporte, (2) región central O ($r_1 \le r \le r_2, 0 \le z \le H_s$) para el muro anular y el suelo de soporte y (3) región exterior E ($r \ge r_2, 0 \le z \le H_s$) para el suelo circundante. Véase que H_s es el espesor del depósito de suelo, r_1 y $r_2 = r_1 + t$ los radios interior y exterior de la cimentación y H_1 y $H_2 = H_1 + d$ sus alturas interior y exterior, siendo t el espesor del muro perimetral y d el peralte de la losa de fondo. En cada región, los campos de desplazamientos y fuerzas pueden construirse mediante la superposición del campo libre correspondiente y un campo difractado, como sigue:

$$\delta_{I,E} = \delta_{I,E}^f + \delta_{I,E}^d = \delta_{I,E}^f + \Delta_{I,E} C_{I,E} \qquad [3]$$

$$\delta_O = \delta_O^f + \delta_O^d = \delta_O^f + \Delta_O^+ C_O^+ + \Delta_O^- C_O^- \qquad [4]$$

$$f_{I,E} = f_{I,E}^f + f_{I,E}^d = f_{I,E}^f + F_{I,E} C_{I,E} \qquad [5]$$

$$f_O = f_O^f + f_O^d = f_O^f + F_O^+ C_O^+ + F_O^- C_O^- \qquad [6]$$

siendo $\delta_\varepsilon^{f,d} = \{\bar{u}, \bar{w}, \bar{v}\}^T$ el vector de desplazamientos, $f_\varepsilon^{f,d} = \{f_r, f_z, f_\theta\}^T$ el vector de fuerzas, Δ_ε la matriz de desplazamientos modales, F_ε la matriz de fuerzas modales y C_ε el vector de coeficientes de participación. El subíndice ε indica región y los superíndices f y d indican campo libre y difractado, respectivamente; asimismo, el superíndice $\pm$ se usa para identificar modos que se propagan (trasmiten energía) en la dirección positiva o negativa de r.

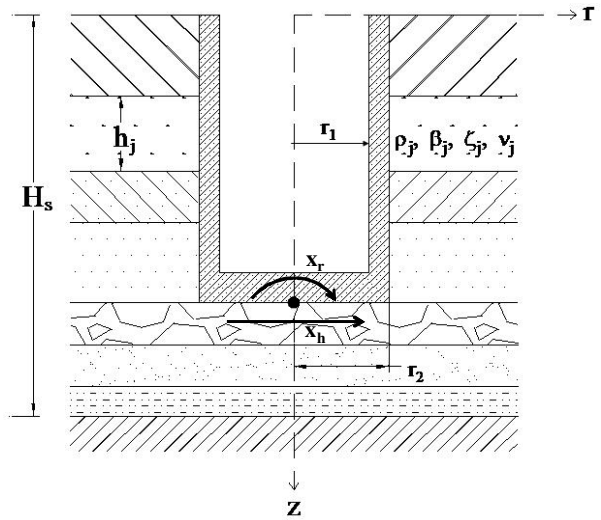

Figura 1. Modelo de interacción dinámica suelo-lumbrera.

Para satisfacer las condiciones de frontera del problema, se hace uso del método de colocación en puntos nodales. En las interfaces entre regiones ($\Gamma_{I,E}$) se impone la compatibilidad de desplazamientos y fuerzas nodales, mientras que en la cara interna del muro (Γ_O) se anulan las fuerzas nodales; esto es:

$$\delta_E(r_2,z_j)=\delta_O(r_2,z_j),\quad 1\le j\le N_E \qquad [7]$$

$$f_E(r_2,z_j)=f_O(r_2,z_j),\quad 1\le j\le N_E \qquad [8]$$

$$f_O(r_1,z_j)=0,\quad 1\le j\le \Delta N \qquad [9]$$

$$\delta_I(r_1,z_j)=\delta_O(r_1,z_{j+\Delta N}),\quad 1\le j\le N_I \qquad [10]$$

$$f_I(r_1,z_j)=f_O(r_1,z_{j+\Delta N}),\quad 1\le j\le N_I \qquad [11]$$

donde $\Delta N = N_E - N_I$, siendo N_I y N_E el número de estratos en las regiones interior y exterior, respectivamente. Sustituyendo las ecs. 3-6 en las ecs. 7-11, se llega al siguiente sistema matricial de ecuaciones algebraicas:

$$\begin{bmatrix} \Delta_E(r_2,z_j) & -\Delta_O^+(r_2,z_j) & -\Delta_O^-(r_2,z_j) & 0 \\ F_E(r_2,z_j) & -F_O^+(r_2,z_j) & -F_O^-(r_2,z_j) & 0 \\ 0 & -F_O^+(r_1,z_j) & -F_O^-(r_1,z_j) & 0 \\ 0 & -\Delta_O^+(r_1,z_{j+\Delta N}) & -\Delta_O^-(r_1,z_{j+\Delta N}) & \Delta_I(r_1,z_j) \\ 0 & -F_O^+(r_1,z_{j+\Delta N}) & -F_O^-(r_1,z_{j+\Delta N}) & F_I(r_1,z_j) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_E \\ C_O^+ \\ C_O^- \\ C_I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_O^f(r_2,z_j)-\delta_E^f(r_2,z_j) & 1\le j\le N_E \\ f_O^f(r_2,z_j)-f_E^f(r_2,z_j) & 1\le j\le N_E \\ f_O^f(r_1,z_j) & 1\le j\le \Delta N \\ \delta_O^f(r_1,z_{j+\Delta N})-\delta_I^f(r_1,z_j) & 1\le j\le N_I \\ f_O^f(r_1,z_{j+\Delta N})-f_I^f(r_1,z_j) & 1\le j\le N_I \end{Bmatrix}, \qquad [12]$$

Resolviendo este sistema complejo de ecuaciones lineales, se obtienen los coeficientes de participación que definen todos los campos de desplazamientos y fuerzas nodales. Este sistema es determinado en el sentido de que hay tantas ecuaciones como incógnitas. Las ecuaciones planteadas son $6N_I$ en Γ_I, $3\Delta N$ en Γ_O y $6N_E$ en Γ_E, mientras que las incógnitas asociadas a los modos de vibrar son $3N_I$ en I, $6N_E$ en O y $3N_E$ en E. Así, el orden de la ec. 12 es $(3N_I+9N_E)\times(3N_I+9N_E)$.

Es importante señalar que la región E está formada sólo por estratos de suelo, la región O por estratos de muro ($0\le z\le H_2$) y estratos de suelo ($H_2\le z\le H_s$) y la región I por estratos de muro ($H_1\le z\le H_2$) y estratos de suelo ($H_2\le z\le H_s$). Nótese que la cara externa del muro perimetral se ha modelado como una frontera rugosa, perfectamente adherida al suelo. Si la frontera se considera lisa, entonces han de anularse los esfuerzos cortantes tangencial y vertical; la continuidad de desplazamientos y esfuerzos se satisface sólo en la dirección radial.

Para calcular las matrices de desplazamientos y fuerzas modales, Δ_ε y F_r, en las tres regiones, se hace uso del método del estrato delgado que lleva a soluciones discretas en la dirección vertical y continuas en la horizontal.

3 ECUACIONES DE MOVIMIENTO Y SOLUCIÓN

Sean u, v y w los desplazamientos radial, tangencial y axial, respectivamente, en coordenadas cilíndricas (r,θ,z). Si el depósito de suelo se subdivide en N estratos, las ecuaciones

diferenciales que gobiernan el movimiento armónico en el estrato $1 \le j \le N$ son

$$\nabla^2 u - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{1-2\upsilon_j}\frac{\partial \varepsilon}{\partial r} + \frac{\omega^2}{\beta_j^2} u = 0 \qquad [13]$$

$$\nabla^2 v - \frac{v}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{1-2\upsilon_j}\frac{1}{r}\frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta} + \frac{\omega^2}{\beta_j^2} v = 0 \qquad [14]$$

$$\nabla^2 w + \frac{1}{1-2\upsilon_j}\frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + \frac{\omega^2}{\beta_j^2} w = 0 \qquad [15]$$

donde ω es la frecuencia de excitación, υ_j la relación de Poisson y $\beta_j = \sqrt{G_j/\rho_j}$ la velocidad de ondas de corte, siendo G_j el módulo de cortante y ρ_j la densidad; ∇^2 y ε son el Laplaciano y la dilatación, respectivamente, definidos como

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad [16]$$

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(u + \frac{\partial v}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial w}{\partial z} \qquad [17]$$

Los componentes de esfuerzo sobre una superficie cilíndrica están relacionados con los componentes de desplazamiento mediante:

$$\sigma_r = \lambda_j \varepsilon + 2G_j \frac{\partial u}{\partial r} \qquad [18]$$

$$\tau_{rz} = G_j\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}\right) \qquad [19]$$

$$\tau_{r\theta} = G_j\left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) \qquad [20]$$

donde $\lambda_j = 2\upsilon_j G_j/(1-2\upsilon_j)$ es la constante de Lamé.

3.1 Descomposición azimutal

La simetría axial de la estructura permite realizar una descomposición azimutal de la solución. Según Kausel y Roësset (1975 y 1977), los desplazamientos modales (radial, vertical y tangencial) pueden obtenerse mediante separación de variables como se indica a continuación.

Modos generalizados de Rayleigh en deformación plana:

$$u(r,\theta,z) = \bar{u}(r,z)\begin{Bmatrix}\cos n\theta \\ \operatorname{sen} n\theta\end{Bmatrix}, \text{ con } \bar{u} = kU(z)C_n'(kr) \qquad [21]$$

$$w(r,\theta,z) = \bar{w}(r,z)\begin{Bmatrix}\cos n\theta \\ \operatorname{sen} n\theta\end{Bmatrix}, \text{ con } \bar{w} = -ikW(z)C_n(kr) \qquad [22]$$

$$v(r,\theta,z) = \bar{v}(r,z)\begin{Bmatrix}-\operatorname{sen} n\theta \\ \cos n\theta\end{Bmatrix}, \text{ con } \bar{v} = \frac{n}{r}U(z)C_n(kr) \qquad [23]$$

Modos generalizados de Love en cortante antiplano:

$$u(r,\theta,z) = \bar{u}(r,z)\begin{Bmatrix}\cos n\theta \\ \operatorname{sen} n\theta\end{Bmatrix}, \text{ con } \bar{u} = \frac{n}{r}V(z)C_n(kr) \qquad [24]$$

$$w(r,\theta,z) = 0 \qquad [25]$$

$$v(r,\theta,z) = \bar{v}(r,z)\begin{Bmatrix}-\operatorname{sen} n\theta \\ \cos n\theta\end{Bmatrix}, \text{ con } \bar{v} = kV(z)C_n'(kr) \qquad [26]$$

donde k es el número de onda horizontal y n el número de onda azimutal; $C_n(\xi)$ es una solución de la ecuación de Bessel de orden n, dada por

$$C_n'' + \frac{1}{\xi}C_n' + \left(1 - \frac{n^2}{\xi^2}\right)C_n = 0 \qquad [27]$$

Para que haya radiación de ondas en la región exterior debe usarse $C_n(\xi) = H_n^2(\xi)$, que es la función de Hankel de segunda especie y orden n. En tanto que para tener ondas estacionarias en la región interior debe usarse $C_n(\xi) = J_n(\xi)$, que es la función de Bessel de primera especie y orden n. El factor armónico en el tiempo $e^{i\omega t}$ se ha omitido por simplicidad. Para modos simétricos con respecto al plano $\theta = 0$, $\bar{u}$ y $\bar{w}$ se combinan con $\cos n\theta$ y $\bar{v}$ con $-\operatorname{sen} n\theta$; en cambio, $\bar{u}$ y $\bar{w}$ se combinan con $\operatorname{sen} n\theta$ y $\bar{v}$ con $\cos n\theta$ para modos antisimétricos. Sustituyendo las ecs. 9-14 en las ecs. 6-8, se puede verificar que

$$\sigma_r(r,\theta,z) = \bar{\sigma}_r(r,z)\begin{Bmatrix}\cos n\theta \\ \operatorname{sen} n\theta\end{Bmatrix}$$
$$\rightarrow f_r(r,\theta,z) = \int \sigma_r(r,\theta,z)dz = \bar{f}_r(r,z)\begin{Bmatrix}\cos n\theta \\ \operatorname{sen} n\theta\end{Bmatrix} \qquad [28]$$

$$\tau_{rz}(r,\theta,z) = \bar{\tau}_{rz}(r,z)\begin{Bmatrix}\cos n\theta \\ \operatorname{sen} n\theta\end{Bmatrix}$$
$$\rightarrow f_z(r,\theta,z) = \int \tau_{rz}(r,\theta,z)dz = \bar{f}_z(r,z)\begin{Bmatrix}\cos n\theta \\ \operatorname{sen} n\theta\end{Bmatrix} \quad [29]$$

$$\tau_{r\theta}(r,\theta,z) = \bar{\tau}_{r\theta}(r,z)\begin{Bmatrix}-\operatorname{sen} n\theta \\ \cos n\theta\end{Bmatrix}$$
$$\rightarrow f_\theta(r,\theta,z) = \int \tau_{r\theta}(r,\theta,z)dz = \bar{f}_\theta(r,z)\begin{Bmatrix}-\operatorname{sen} n\theta \\ \cos n\theta\end{Bmatrix} \quad [30]$$

donde

$$\bar{f}_r(r,z) = \int \sigma_r(r,z)dz$$

$$\bar{f}_z(r,z) = \int \tau_{rz}(r,z)dz$$

y

$$\bar{f}_\theta(r,z) = \int \tau_{r\theta}(r,z)dz$$

De esta forma se demuestra que la descomposición azimutal de esfuerzos y fuerzas es idéntica a la de desplazamientos. La selección de la función azimutal, $\cos n\theta$ o $\operatorname{sen} n\theta$, depende de la física del problema. Para excitación horizontal x_g, sus componentes en coordenadas cilíndricas son $u_g = x_g \cos\theta$, $w_g = 0$ y $v_g = -x_g \operatorname{sen}\theta$. En consecuencia, sólo se requiere del análisis de vibraciones simétricas para el número azimutal $n = 1$. Así, el problema tridimensional se reduce a uno bidimensional en el plano $r - z$.

4 IMPLEMENTACION NUMERICA

4.1 Campos difractados

Aplicando el método del estrato delgado (Lysmer y Waas, 1972; Lysmer y Drake, 1972), es fácil demostrar que las eigenfunciones discretas $U(z_j)$ y $W(z_j)$ con eigenvalor k que satisfacen las ecuaciones de movimiento en deformación plana, las condiciones de continuidad de esfuerzos y desplazamientos entre estratos y las condiciones de frontera de superficie libre y base rígida, se obtienen resolviendo el problema algebraico de valores característicos

$$\left[k^2\tilde{A} + ik\tilde{B} + \tilde{G} - \omega^2\tilde{M}\right]\tilde{\Lambda} = \tilde{0} \quad [31]$$

donde

$$\tilde{\Lambda} = \begin{Bmatrix}\Lambda_{2j-1} = U_j \\ \Lambda_{2j} = W_j\end{Bmatrix}, \quad 1 \le j \le N \quad [32]$$

es un eigenvector de amplitudes nodales y $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{G}$ y $\tilde{M}$ son matrices de $2N \times 2N$ ensambladas con las matrices de estrato para elementos en deformación plana (Tassoulas y Kaussel, 1983). Al resolver la ec. 31 es necesario seleccionar los valores de k_l y $\tilde{\Lambda}_l$, $1 \le l \le 2N$, tal que los desplazamientos modales en la región exterior decaigan con la distancia. Para cumplir con esta condición de radiación, se requiere que $\operatorname{Im}[k_l] < 0$.

Igualmente es fácil demostrar que la eigenfunción discreta $V(z_j)$ con eigenvalor k que satisface la ecuación de movimiento en cortante antiplano, las condiciones de continuidad de esfuerzo y desplazamiento entre estratos y las condiciones de frontera de superficie libre y base rígida, se obtiene resolviendo el problema algebraico de valores característicos

$$\left[k^2\tilde{A} + \tilde{G} - \omega^2\tilde{M}\right]\tilde{\Lambda} = \tilde{0} \quad [33]$$

donde

$$\tilde{\Lambda} = \left\{\Lambda_j = V_j\right\}, \quad 1 \le j \le N \quad [34]$$

es un eigenvector de amplitudes nodales y $\tilde{A}$, $\tilde{G}$ y $\tilde{M}$ son matrices de $N \times N$ ensambladas con las matrices de estrato para elementos en cortante antiplano (Tassoulas y Kaussel, 1983). Al resolver la ec. 33 es necesario seleccionar los valores de k_l y $\tilde{\Lambda}_l$, $1 \le l \le N$, tal que los desplazamientos modales en la región exterior decaigan con la distancia. Para cumplir con esta condición de radiación, se requiere que $\operatorname{Im}[k_l] < 0$.

Una vez resueltos los problemas de valores característicos en deformación plana y cortante antiplano, la matriz de desplazamientos modales en la superficie cilíndrica $r = r_o$ se construye como

$$\tilde{\Delta}_\varepsilon = \begin{bmatrix}\Delta_{3j-2,l} = \bar{u}_l(r_o, z_j) \\ \Delta_{3j-1,l} = \bar{w}_l(r_o, z_j) \\ \Delta_{3j,l} = \bar{v}_l(r_o, z_j)\end{bmatrix}, 1 \le j \le N \text{ y } 1 \le l \le 3N \quad [35]$$

donde

$$\left.\begin{aligned}\Delta_{3j-2,l} &= k_l U_j^l C_n'(k_l r_o)\\ \Delta_{3j-1,l} &= -ik_l W_j^l C_n(k_l r_o)\\ \Delta_{3j,l} &= \frac{n}{r_o} U_j^l C_n(k_l r_o)\end{aligned}\right\},\quad \text{si } 1 \le l \le 2N \qquad [36]$$

$$\left.\begin{aligned}\Delta_{3j-2,l} &= \frac{n}{r_o} V_j^{l-2N} C_n(k_l r_o)\\ \Delta_{3j-1,l} &= 0\\ \Delta_{3j,l} &= k_l V_j^{l-2N} C_n'(k_l r_o)\end{aligned}\right\},\quad \text{si } 2N+1 \le l \le 3N \qquad [37]$$

Los eigenvalores $k_1,...,k_{2N}$ y $k_{2N+1},...,k_{3N}$ corresponden a modos generalizados de Rayleigh y Love, respectivamente. Las fuerzas nodales actuando en la superficie cilíndrica $r = r_i$ pueden obtenerse integrando los esfuerzos correspondientes con respecto a z. Estas fuerzas discretizadas están en equilibrio estático con los esfuerzos de estrato y son consistentes con la interpolación lineal de desplazamientos considerada. Según Kausel y Roësset (1975 y 1977), el vector de fuerzas nodales correspondiente al modo $\tilde{\Lambda}_l$ con número de onda k_l es

$$\tilde{F}_l = \begin{Bmatrix} F_{3j-2} = \bar{f}_r(r_i, z_j)\\ F_{3j-1} = \bar{f}_z(r_i, z_j)\\ F_{3j} = \bar{f}_\theta(r_i, z_j)\end{Bmatrix}_{1\le j\le N} = \qquad [38]$$

$$\left\{k_l^2 \tilde{A}\tilde{\psi}_l + k_l\left[\tilde{D} - \tilde{E} + n\tilde{N}\right]\tilde{\phi}_l - n\left[\frac{n+1}{2}\tilde{L} + \tilde{Q}\right]\tilde{\psi}_l\right\}$$

donde $\tilde{A}$, $\tilde{D}$, $\tilde{E}$, $\tilde{N}$, $\tilde{L}$ y $\tilde{Q}$ son matrices de $3N \times 3N$ ensambladas con las matrices de estrato para elementos axisimétricos (Tassoulas y Kaussel, 1983), mientras que $\tilde{\psi}_l$ y $\tilde{\phi}_l$ son las columnas de las siguientes matrices:

$$\tilde{\psi} = \begin{bmatrix}\psi_{3j-2,l}\\ \psi_{3j-1,l}\\ \psi_{3j,l}\end{bmatrix},\quad 1 \le j \le N \text{ y } 1 \le l \le 3N \qquad [39]$$

donde:

$$\left.\begin{aligned}\psi_{3j-2,l} &= -U_j^l C_n(k_l r_o)\\ \psi_{3j-1,l} &= -iW_j^l C_{n-1}(k_l r_o)\\ \psi_{3j,l} &= 0\end{aligned}\right\},\quad \text{si } 1 \le l \le 2N \qquad [40]$$

$$\left.\begin{aligned}\psi_{3j-2,l} &= 0\\ \psi_{3j-1,l} &= 0\\ \psi_{3j,l} &= -V_j^{l-2N} C_n(k_l r_o)\end{aligned}\right\},\quad \text{si } 2N+1 \le l \le 3N \qquad [41]$$

$$\tilde{\phi} = \begin{bmatrix}\phi_{3j-2,l}\\ \phi_{3j-1,l}\\ \phi_{3j,l}\end{bmatrix},\quad 1 \le j \le N \text{ y } 1 \le l \le 3N \qquad [42]$$

aquí:

$$\left.\begin{aligned}\phi_{3j-2,l} &= U_j^l C_{n-1}(k_l r_o)\\ \phi_{3j-1,l} &= iW_j^l C_n(k_l r_o)\\ \phi_{3j,l} &= 0\end{aligned}\right\},\quad \text{si } 1 \le l \le 2N \qquad [43]$$

$$\left.\begin{aligned}\phi_{3j-2,l} &= 0\\ \phi_{3j-1,l} &= 0\\ \phi_{3j,l} &= V_j^{l-2N} C_{n-1}(k_l r_o)\end{aligned}\right\},\quad \text{si } 2N+1 \le l \le 3N \qquad [44]$$

Los vectores $\tilde{F}_l$, $1 \le l \le 3N$, que se obtienen con la ec. 38 son las columnas de la matriz de fuerzas modales

$$\tilde{F}_\varepsilon = \left[\tilde{F}_1,\quad \tilde{F}_2,\quad \Lambda\quad \tilde{F}_{3N}\right] \qquad [45]$$

La función de onda $C_n(\xi)$ que se use para fuerzas modales es la misma que para desplazamientos modales.

4.2 Campos libres

En coordenadas cilíndricas, los desplazamientos de campo libre debidos a la incidencia vertical de ondas de cortante se expresan como

$$\left.\begin{aligned}u(r,\theta,z) &= \bar{u}(r,z)\cos\theta\\ w(r,\theta,z) &= 0\\ v(r,\theta,z) &= -\bar{v}(r,z)\,\text{sen}\,\theta\end{aligned}\right\} \qquad [46]$$

con $\bar{u}(r,z) = \bar{v}(r,z) = V(z)$. Siguiendo la formulación de Tassoulas y Kausel (1983) para propagación vertical, $k = 0$, las amplitudes nodales $V(z_j)$ se obtienen del sistema de ecuaciones algebraicas

$$\left[\tilde{G} - \omega^2 \tilde{M}\right]\tilde{V} = \tilde{0} \qquad [47]$$

donde $\tilde{V} = \{V_j\}$, $1 \le j \le N+1$. Para resolverlo es necesario imponer el movimiento $V_{N+1} = x_g$ en la base,

eliminando el último renglón-columna de las matrices $\tilde{G}$ y $\tilde{M}$ y el último elemento de los vectores $\tilde{V}$ y $\tilde{0}$.
Finalmente, con los desplazamientos de campo libre

$$\tilde{\delta}_{\varepsilon}^{f} = \begin{Bmatrix} \delta_{3j-2} = V_j \\ \delta_{3j-1} = 0 \\ \delta_{3j} = V_j \end{Bmatrix}, \quad 1 \le j \le N \qquad [48]$$

se obtienen las fuerzas de campo libre

$$\tilde{f}_{\varepsilon}^{f} = \tilde{D}\,\tilde{\delta}_{\varepsilon}^{f} \qquad [49]$$

donde $\tilde{D}$ es la matriz usada en la ec. 38 multiplicando las columnas $3j-1$ por menos uno. Debido a la estructura de esta matriz, las fuerzas radial y tangencial son nulas para excitación horizontal.

5 VERIFICACIÓN DE LA SOLUCIÓN

En un trabajo anterior, Pérez Rocha y Avilés (2010) presentaron un antecedente de este trabajo que es un modelo de dos regiones para estudiar una lumbrera sólida. Para probar el método, los autores realizaron una comparación con una solución analítica de Veletsos y Younan (1994; 1995) para un cilindro rígido empotrado en la base de un estrato homogéneo. Los autores presentaron la variación de los valores estáticos de momento y cortante con respecto a la relación de esbeltez, para un depósito de suelo con 0, 1/3 y 1/2, y 0.05. La comparación de resultados numéricos con analíticos mostró una excelente concordancia, especialmente cuando la relación no es cercana a 0.5, porque en la solución analítica se desprecia el componente vertical del movimiento.

Pérez Rocha y Avilés (2010) también compararon el método presentado con una solución analítica de Nicolau y col (2001) para una viga sobre cimentación elástica. Esta solución es aproximada, basada en un modelo de Winkler. Se comparó la deformación por flexión y el momento flexionante obtenidos por Nicolau y col (2001) contra los valores calculados con el método aquí descrito. La mayor diferencia se observó en la base de la pila y se debe a la condición de frontera usada. Se ha considerado al apoyo libre de esfuerzos, cuando en realidad se tiene una condición de compatibilidad de desplazamientos y fuerzas.

6 EXCITACIÓN EFECTIVA DE LA BASE

En el enfoque convencional de diseño se utilizan espectros en superficie de campo libre. Sin embargo, en estructuras con niveles subterráneos pueden no ser representativos del movimiento real de la cimentación, ya que se desprecia la difracción de las ondas incidentes por los muros y la losa del cajón de cimentación. Lo apropiado en estos casos es el uso de espectros de sótano con ISE.

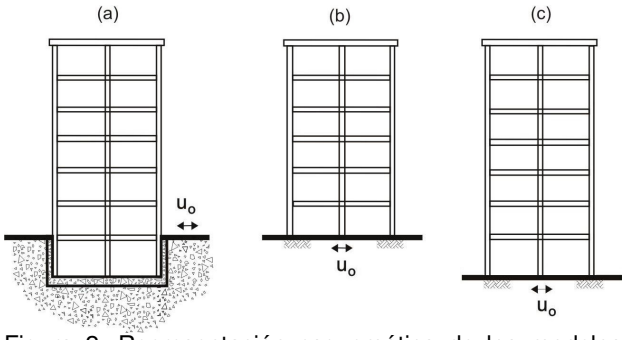

Figura 2. Representación esquemática de los modelos (b) y (c) usados en la práctica para análisis sísmico del sistema real (a).

La Figura 2 muestra los modelos comúnmente usados en la práctica para el análisis sísmico de estructuras con niveles subterráneos. Especificado el movimiento de campo libre u_o en la superficie, el sistema real (a) suele representarse mediante el modelo (b) de una estructura con base fija al nivel de terreno, o el modelo (c) de una estructura con base fija al nivel de desplante. En ambos casos se supone que la base es indeformable y que la excitación es igual al movimiento de campo libre, con lo que se ignoran los efectos de interacción inercial y cinemática. La única diferencia entre los dos modelos es la altura de la estructura, medida desde el nivel de terreno para el modelo (b) y desde el nivel de desplante para el modelo (c). Mientras el primero considera sólo la flexibilidad de la estructura, el segundo incluye la flexibilidad del sótano.

En la Figura. 3 se muestra el modelo que mejor refleja el comportamiento del sistema suelo-cimentación-estructura ante excitación sísmica. El suelo se ha reemplazado por resortes y amortiguadores que tienen en cuenta su flexibilidad y capacidad de disipación de energía. Por simplicidad sólo se indican los resortes, pero en paralelo a éstos pueden agregarse los amortiguadores. Los resortes también pueden verse como cantidades complejas, cuyas partes real e imaginaria representan la rigidez y el amortiguamiento, respectivamente. El movimiento

de campo libre se ha transformado en una excitación efectiva, cuyos componentes de traslación u_c y rotación θ_c se aplican al nivel de desplante.

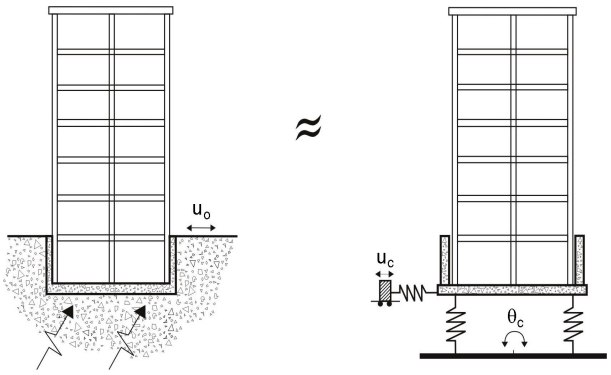

Figura 3. Modelación rigurosa de sistemas suelo-cimentación-estructura ante excitación sísmica.

La excitación efectiva de la base representa el movimiento de entrada que resulta de superponer el campo libre con el campo difractado por la cimentación. Es en realidad un movimiento ficticio, puesto que se obtiene ignorando la masa tanto de la estructura como de la cimentación.

6.1 Métodos de análisis

Para el cálculo de la excitación efectiva se discuten tres métodos. El primero de ellos es un método simplificado propuesto por Kausel y col (1978). Es un método práctico que consiste en describir las modificaciones del movimiento mediante expresiones simplificadas. El segundo es el método de Iguchi (1984). Se trata de un método sencillo en que la excitación efectiva se obtiene mediante un promedio pesado de los desplazamientos y esfuerzos de campo libre que se tienen a lo largo de la frontera entre la cimentación rígida y el suelo. El tercero es un método de frontera riguroso.

6.1.1 Método de Kausel

Los efectos del paso de ondas sísmicas se representan mediante funciones de transferencia entre los componentes del movimiento de entrada y del campo libre, esto es: $H_u = u_c / u_o$ y $H_\theta = \theta_c / u_o$. Para el caso de incidencia vertical de ondas de corte en un estrato uniforme, una solución práctica está dada por las siguientes expresiones (Kausel et al, 1978):

$$H_u(\omega) = \frac{u_c}{u_o} = \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{\omega}{\omega_c}\right); & \text{si } \omega \le 0.7\omega_c \\ 0.453; & \text{si } \omega > 0.7\omega_c \end{cases} \qquad [50]$$

$$RH_\theta(\omega) = \frac{R\theta_c}{u_o} = \begin{cases} 0.257\left[1-\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{\omega}{\omega_c}\right)\right]; & \text{si } \omega \le \omega_c \\ 0.257; & \text{si } \omega > \omega_c \end{cases} \qquad [51]$$

donde R es el radio equivalente de la cimentación, V_s es la velocidad de propagación de ondas de corte del suelo, $\omega_c = \pi V_s / 2D$ la frecuencia fundamental del suelo hasta la profundidad de desplante D y ω la frecuencia de excitación. Nótese que estas expresiones son independientes del espesor de la pared del cimiento, del espesor del estrato y del contraste de impedancias entre suelo y basamento, parámetros cuyos efectos están implícitos en el movimiento de campo libre en la superficie. Cabe señalar que el movimiento horizontal de la cimentación tiende a parecerse al desplazamiento de campo libre al nivel del desplante y que el cabeceo se aproxima a la seudorrotación, es decir, la diferencia de desplazamientos entre la superficie libre y el nivel de desplante dividida entre el enterramiento del cajón.

6.1.2 Método de Iguchi

Para el cálculo riguroso de la excitación efectiva es necesario recurrir al uso de métodos de elementos finitos o elementos de frontera. No obstante, en aplicaciones prácticas pueden emplearse las técnicas aproximadas sugeridas en las normas. Por su sencillez y precisión, destaca el método promediador de Iguchi (1984) para cimentaciones enterradas rígidas. La excitación efectiva se obtiene mediante un promedio pesado de los desplazamientos y esfuerzos de campo libre que se tienen a lo largo de la frontera entre la cimentación y el suelo, mediante la expresión

$$\Delta_c = \mathbf{T}^{-1}\iint \mathbf{A}^T \boldsymbol{\delta}_o d\Gamma + \mathbf{K}^{-1}\iint \mathbf{A}^T \boldsymbol{\tau}_o d\Gamma \qquad [52]$$

Donde:

$$\mathbf{T} = \iint \mathbf{A}^T \mathbf{A} d\Gamma \qquad [53]$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z - z_c & y_c - y \\ 0 & 1 & 0 & z_c - z & 0 & x - x_c \\ 0 & 0 & 1 & y - y_c & x_c - x & 0 \end{bmatrix} \qquad [54]$$

En estas ecuaciones, $\boldsymbol{\delta}_o$ y $\boldsymbol{\tau}_o$ representan los vectores de desplazamientos y esfuerzos de campo libre, respectivamente, en la superficie de contacto Γ entre la cimentación y el suelo, $\boldsymbol{K}$ denota la matriz de rigidez dinámica formada con las funciones de impedancia (resortes y amortiguadores) y $\boldsymbol{A}$ una matriz de transformación de movimiento de cuerpo rígido. Las integrales de las ecs. 52 y 53 se extienden a lo largo de la frontera Γ. Nótese que el segundo término del lado derecho de la ec. 52 es cero para cimentaciones superficiales, ya que los esfuerzos de campo libre en la superficie son nulos. Para cimentaciones enterradas, este término representa los desplazamientos y rotaciones causados por las fuerzas y momentos resultantes de los esfuerzos de campo libre en la frontera Γ. En general, el vector Δ_c consta de tres traslaciones y tres rotaciones, dependiendo del tipo de ondas sísmicas y el ángulo de incidencia.

Para un sitio arbitrario se calcularon las funciones de transferencia cinemáticas de la Figura. 4 usando los procedimientos descritos. Puede verse que la reducción del componente de traslación va acompañada con la generación del componente de cabeceo. El movimiento efectivo de traslación sufre reducciones porque la variación espacial del movimiento de campo libre alrededor de la cimentación es promediada debido a su gran rigidez. El movimiento efectivo de rotación aparece por la misma razón, ya que la cimentación al no poder deformarse tiende a girar.

Dado el movimiento de control en la superficie, $\ddot{u}_o(t)$, la excitación efectiva de la base en el dominio de la frecuencia se determina como

$$\ddot{u}_c^*(\omega) = H_u(\omega)\, \ddot{u}_o^*(\omega) \qquad [55]$$

$$\ddot{\theta}_c^*(\omega) = H_\theta(\omega)\, \ddot{u}_o^*(\omega) \qquad [56]$$

donde el asterisco denota la trasformada directa de Fourier. La excitación efectiva de la base en el dominio del tiempo se obtiene mediante la trasformada inversa de Fourier.

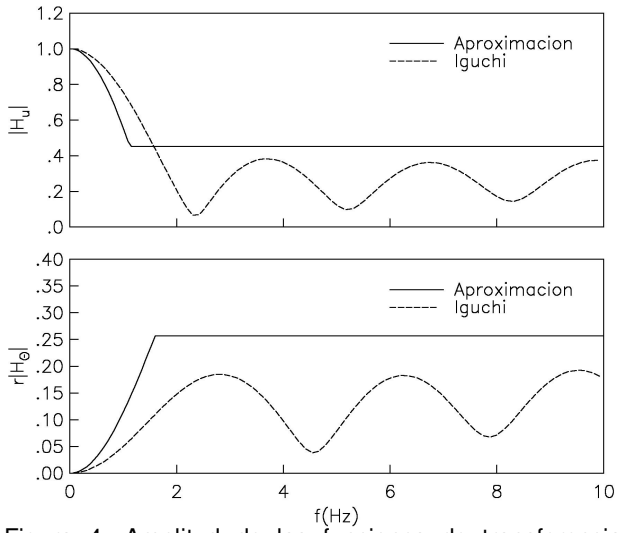

Figura 4. Amplitud de las funciones de transferencia cinemáticas para traslación y cabeceo de una cimentación enterrada en un estrato uniforme.

La Figura. 5 muestra las historias de aceleración $\ddot{u}_c(t)$ y $r\ddot{\theta}_c(t)$ así calculadas, usando un acelerograma $\ddot{u}_o(t)$ correspondiente a la superficie del sitio estudiado. El movimiento en la superficie del terreno se transfirió a la base de la cimentación con las funciones de respuesta cinemáticas de la Figura. 4. Nótese que $\ddot{u}_c(t)$ tiene menos rugosidad que $\ddot{u}_o(t)$. Esto se debe a que en la excitación traslacional de la base se han filtrado frecuencias altas.

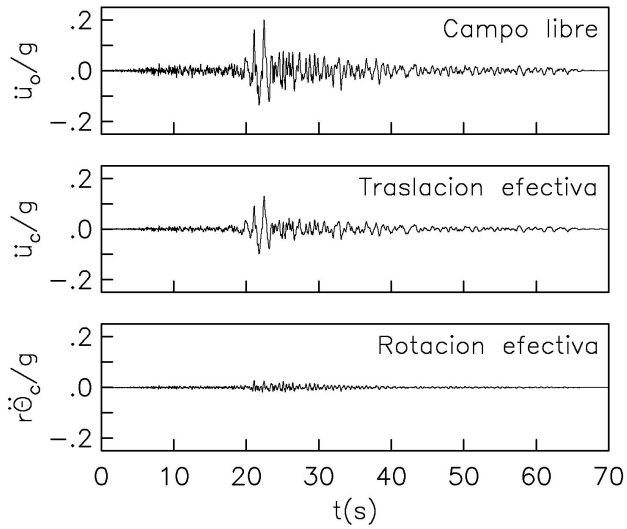

Figura 5.Movimiento de campo libre en la superficie y movimientos de traslación y rotación de la base.

Usando estas historias de aceleración, se calcularon los espectros de respuesta (Sa/g) para los movimientos de traslación y rotación de la base.

En la Figura. 6 se presentan dichos espectros, comparados con el espectro de respuesta de campo libre. Estos resultados muestran que: a) el espectro de sótano traslacional se reduce significativamente respecto al espectro de campo libre en el intervalo de periodos cortos a moderados; y b) las ordenadas espectrales para la excitación rotacional son un orden de magnitud menor que para la excitación traslacional. Los efectos de traslación y rotación de la base han de superponerse en cada instante. Puesto que generalmente dichos movimientos no están en fase, el efecto de $\ddot{u}_c$ puede combinarse con el efecto de $\ddot{\theta}_c$ usando la regla de la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados.

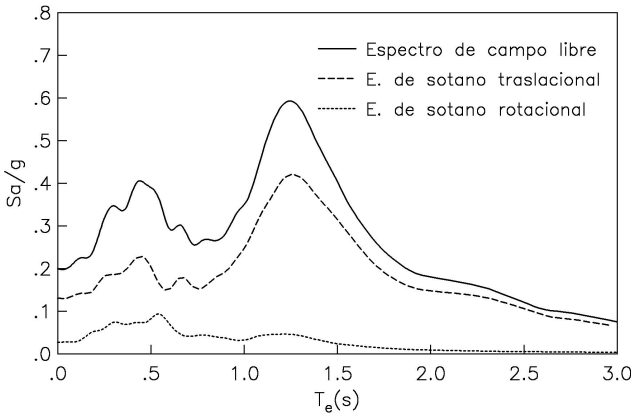

Figura 6. Espectros de respuesta traslacional y rotacional comparados con el espectro de respuesta de campo libre.

6.1.3 Método riguroso

Para el cálculo riguroso de la excitación efectiva se emplea el método de frontera descrito en este informe, y que en particular, hace uso del método del estrato delgado para la solución de los campos difractados. Como se discutió, el método se ha formulado para considerar el espesor de las paredes de las cimentaciones en cajón.

Como ejemplo, se estudió el movimiento efectivo en la base y en la cabeza de una pila enterrada, con radio R y longitud 6R, enterrada en un estrato de espesor 10R. El estrato está apoyado en una base rígida. La densidad del suelo y de la pila es la misma, mientras que la velocidad de la pila es cinco veces la velocidad del estrato. Las relaciones de Poisson en ambos materiales es la misma (v=0.25). El periodo del estrato es Ts=1.0 s.

En la Figura 7 se ilustran las funciones de transferencia del movimiento en la superficie del estrato, lejos de la cimentación (línea continua), en la cabeza de la pila (línea punteada) y en la base de la pila (línea discontinua). Nótese que el movimiento en la cabeza de la pila es casi igual al movimiento en la superficie del estrato, mientras que en la base de la pila se tienen cambios significativos.

Para ver estas diferencias se hicieron los cocientes entre los movimientos en la pila (cabeza y base) con respecto al movimiento en la superficie del suelo. Estos cocientes se muestran en la Figura 8. En esta figura, con línea continua se ilustra la función propuesta por Kausel (ec 50), con línea discontinua el movimiento relativo en la base y con línea punteada en la cabeza de la pila. Las reducciones en la base de la pila siguen la predicción dada por Kausel, aunque los detalles escapan de las predicciones hechas por la ec 50. Por su parte el movimiento efectivo en la cabeza de la pila empieza a tener reducciones a partir de los 3 o 4 Hz. Estas reducciones son típicas de la interacción cinemática.

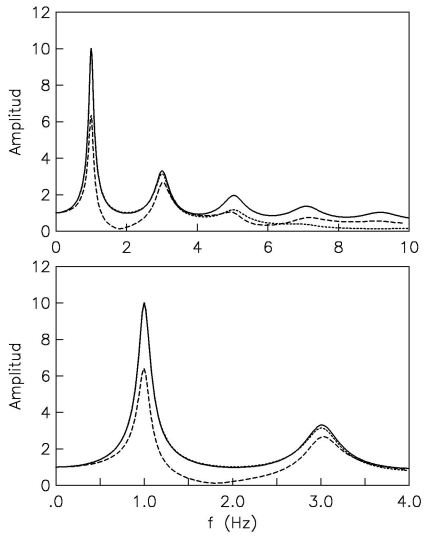

Figura 7. Funciones de transferencia del movimiento en la superficie del estrato, lejos de la cimentación (línea continua), en la cabeza de la pila (línea punteada) y en la base de la pila (línea discontinua).

Para ilustrar los efectos que se tienen en los espectros de diseño, se propuso un estrato con 120 m/s de velocidad de ondas de corte y 40 m de espesor apoyado en una base rígida. La relación de Poisson del suelo es 0.45 y el peso volumétrico es 1.5 t/m^3. Para estudiar el efecto del espesor relativo del estrato con respecto al radio, se propusieron 3 radios de cimentación: r=20, 10 y 8 m, con lo que se tiene que Hs/r=2, 4 y 5. Se estudiaron además, cuatro profundidades relativas de enterramiento: D/r=0, 1/2, 1 y 3/2.

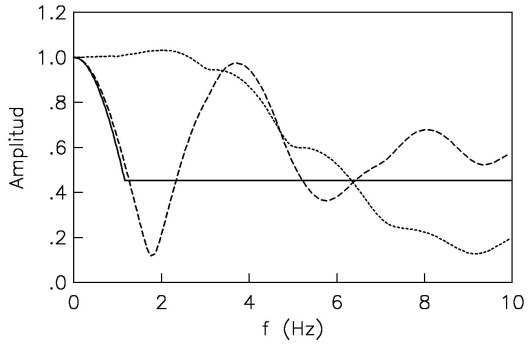

Figura 8. Movimientos relativos de la pila con respecto al movimiento de campo libre en la superficie del estrato (en ausencia de pila). Con línea continua se ilustra la función propuesta por Kausel (ec 50), con línea discontinua el movimiento relativo en la base y con línea punteada en la cabeza de la pila.

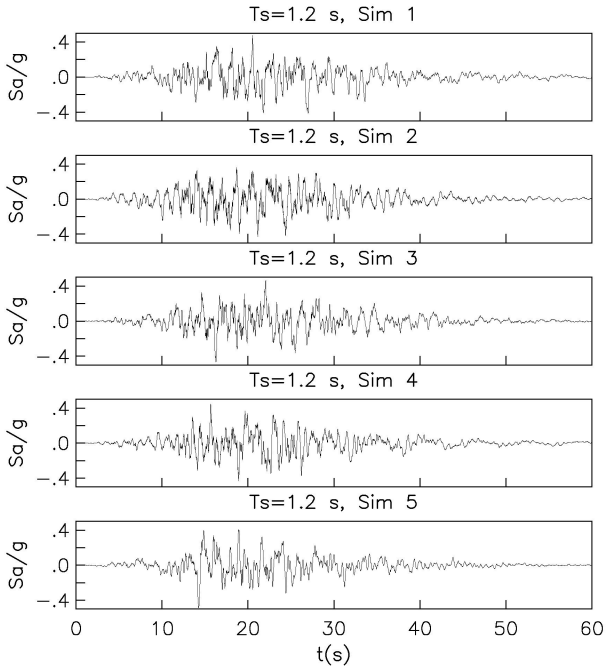

Figura 9. Acelerogramas sintéticos en la superficie de un estrato con Ts=1.2 s. Son acelerogramas de campo libre.

La forma de proceder fue construir un espectro de diseño de sitio con reglas sencillas (por ejemplo, MDOC-93). Después se calcularon acelerogramas sintéticos cuyos espectros de respuesta correspondieran con el espectro objetivo, en este caso, el espectro de diseño. Estos Acelerogramas, supuestos en la superficie del terreno, se tomarán como movimientos de campo libre para modificarlos por efectos de interacción cinemática. Los Acelerogramas sintéticos se ilustran en la Figura 9. En la Figura 10 se muestran los espectros de respuesta de las simulaciones (con líneas delgadas), el espectro promedio (con línea gruesa continua) y el espectro objetivo (con líneas gruesas discontinuas) que es el que sirvió para ajustar el contenido de frecuencias de las simulaciones. El ajuste es excelente.

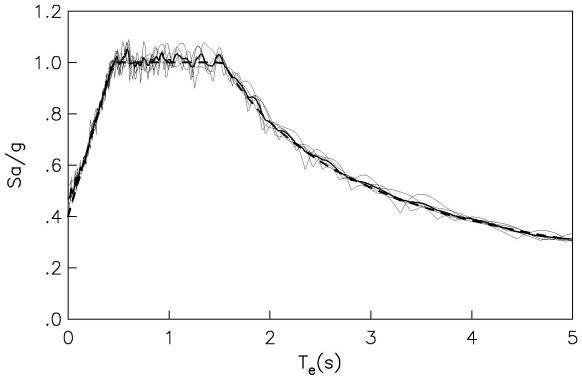

Figura 10. Espectros de respuesta de las simulaciones (líneas continuas delgadas), espectro promedio (línea gruesa continua) y espectro de diseño objetivo (línea gruesa discontinua)

El la Figura 11 se ilustran los espectros de traslación horizontal (líneas discontinuas) y de rotación (líneas punteadas), así como el espectro de campo libre (línea continua) para cada uno de los escenarios estudiados, dados por Hs/r y D/r. En cada recuadro se indican los espectros de respuesta promedio (líneas delgadas) y el ajuste propuesto como espectro de diseño (líneas gruesas). Es claro que los efectos de interacción son nulos cuando la cimentación es superficial (D=0), y que estos aumentan cuando aumenta la profundidad de enterramiento. Por otro lado, cuando aumenta el espesor relativo del estrato, es decir, cuando se reduce el radio de la cimentación en comparación con el espesor del estrato, los efectos de interacción cinemática se reducen. Los efectos de interacción se pueden resumir en que se reduce el componente horizontal y aparece un componente de rotación, especialmente en alta frecuencia o periodos cortos. A periodo largo, los efectos de interacción desaparecen.

7 CONCLUSIONES

Se ha presentado un método de superposición modal estudiar los efectos de interacción cinemática en cimentaciones cilíndricas enterradas en medios estratificados, validado con resultados teóricos de lumbreras rígidas empotradas en su base (solución de Veletsos y Younan, 1995) y con resultados numéricos aproximados para un pilote enterrado en un medio formado por dos estratos (Nicolau y col, 2001). El

método se comparó con la solución simplificada de Kausel (Kausel et al, 1978) y con una solución aproximada de Iguchi (1984). Se hizo un estudio en el que se identificó que los efectos de interacción cinemática aumentan cuando aumenta la profundidad de enterramiento y cuando aumenta el espesor relativo del estrato. Los efectos de interacción se identifican porque se reduce el componente horizontal y aparece un componente de rotación, especialmente en alta frecuencia o periodos cortos.

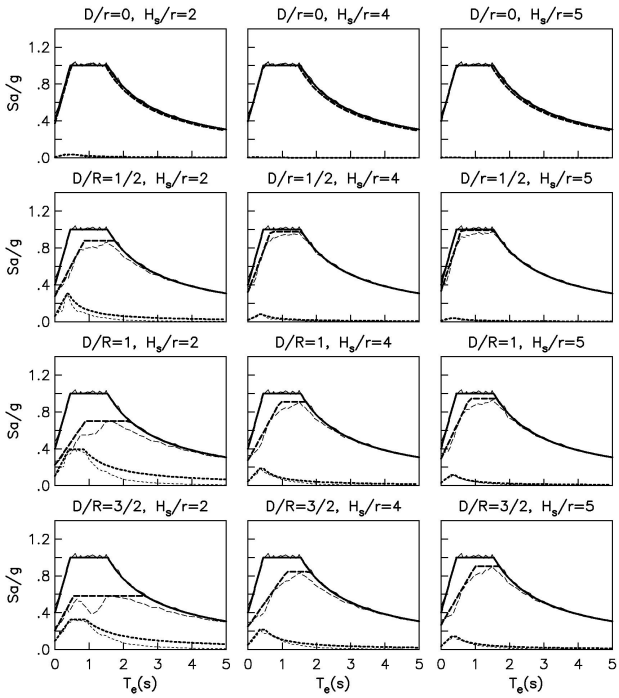

Figura 11. Espectros de traslación horizontal (líneas discontinuas) y de rotación (líneas punteadas), así como el espectro de campo libre (línea continua) para cada uno de los escenarios estudiados, dados por Hs/r y D/r. En cada recuadro se indican los espectros de respuesta promedio (líneas delgadas) y el ajuste propuesto como espectro de diseño (líneas gruesas).

REFERENCIAS

Iguchi M (1984), *Earthquake response of embedded cylindrical foundations to SH and SV waves, 8th World Conference on Earthquake Engineering*, San Francisco, USA.

Kausel E y Roësset J M, *Dynamic stiffness of circular foundations*, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 101, pp. 771-785, 1975.

Kausel E y Roësset J M, *Semianalytic hyperelement for layered strat*a, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 103, pp. 569-588, 1977.

Lysmer J y Drake L A, *A finite element method for seismology, Methods in Computational Physics. Advances in Research and Applications*, Ed. B A Bolt, Vol. 11: Surface Waves and Earth Oscillations, Academic Press, 1972.

Lysmer J y Waas G, *Shear waves in plane infinite structures*, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 98, pp. 85-105, 1972.

MDOC (1993) *Manual de Diseño de Obras Civiles. Capítulo de Diseño por Sismo*. CFE

Nicolau S, Mylonakis G, Gazetas G y Tazoh T, *Kinematic pile bending during earthquakes: analysis and field measurements, Géotechnique, Vol. 51*, pp. 425-440, 2001.

Pérez Rocha L E y Avilés López J (2010). *Determinación de acciones sísmicas en lumbreras enterradas en suelo blando*. Primer Simposio sobre túneles y lumbreras. Amitos, Cd de México.

Tassoulas J L y Kausel E, Elements for the numerical analysis of wave motion in layered media, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 19, pp. 1005-1032, 1983.

Veletsos A S y Younan A H, *Dynamic soil pressures on rigid cylindrical vaults, Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 23, pp. 645-669, 1994.

Veletsos A S y Younan A H, *Dynamic modeling and response of rigid embedded cylinders*, Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 121, pp. 1026-1035, 1995.