Efecto de la flexibilidad del muro y del apoyo en la respuesta sísmica de lumbreras

Luis E. Pérez Rocha
Instituto de Investigaciones Eléctricas, México
Javier Avilés López
InstitutoMexicano de Tecnología del Agua, México

ABSTRACT
A boundary method to analyze the dynamic soil-shaft interaction, considering the flexibility of the structure and the translation-rotation of its base, is presented in this work. The model consists in a floating flexible cylinder buried in a soil deposit with rigid base, forming three regions: one interior with the bottom slab and the supporting soil, other at the center with the retaining wall and the supporting soil and another outside with the surrounding soil. For each region, displacements and forces are expressed by means of superposition of wave modes traveling horizontally. Later, boundary conditions in the interfaces between the regions, given by the compatibility of displacements and forces in the elastic boundaries and null forces at the internal face of the shat, are imposed. Vertical incidence of shear waves is considered as excitation of the system. Wave modes of both regions are computed with the thin layer method, is such a way that the solution is discreet in the vertical direction and continuous in the horizontal one. The effect of the thin wall in the forces that act on the shaft are shown.

RESUMEN
En este trabajo se presenta un método de frontera para análisis de interacción dinámica suelo-lumbrera, considerando la flexibilidad de la estructura y la traslación-rotación de su base. El modelo consiste en un cilindro flexible flotante, de pared delgada, enterrado en un depósito de suelo con base rígida, formando tres regiones: una interior con la losa de fondo de la lumbrera y el suelo de soporte, una central formada por el fuste y el suelo de soporte y otra exterior con el suelo circundante. Para cada región, los desplazamientos y fuerzas se expresan mediante superposición de modos de ondas que viajan horizontalmente. Posteriormente se imponen las condiciones de frontera en las interfaces entre las regiones, dadas por la compatibilidad de desplazamientos y fuerzas en las fronteras elásticas, y fuerzas nulas en la cara interior del fuste, que es superficie libre. Como excitación del sistema se considera la incidencia vertical de ondas de cortante. Los modos de ondas en las dos regiones se calculan con el método del estrato delgado, de suerte que la solución es discreta en la dirección vertical y continua en la horizontal. Se muestra el efecto que tiene la pared delgada en las fuerzas que actúan sobre la lumbrera.

1 INTRODUCCION

Los efectos sísmicos en estructuras subterráneas se suelen evaluar con enfoques diferentes a los utilizados para estructuras superficiales. En general, para estructuras subterráneas, las acciones de diseño se expresan en términos de desplazamientos y deformaciones impuestos en la estructura por el suelo debido a la interacción entre ambos.

El enfoque de diseño más sencillo es el que ignora la interacción de la estructura subterránea con el suelo circundante. Según este enfoque, primero se estiman las deformaciones del terreno en campo libre y luego la estructura se diseña para acomodarse a estas deformaciones. El resultado es satisfactorio cuando el suelo es mucho más rígido que la estructura. En caso contrario es necesario considerar los efectos de interacción dinámica, ya que pueden afectar considerablemente las deformaciones circundantes. Estos efectos son debidos a la difracción de las ondas incidentes por la estructura misma (interacción cinemática) así como a las fuerzas de inercia generadas por la vibración del sistema suelo-estructura (interacción inercial).

Durante sismo, las lumbreras se sujetan a significativas curvaturas impuestas por el movimiento lateral del suelo, que generan momentos flexionantes de consideración. Las soluciones reportadas en la literatura son escasas y limitadas. Destaca por sencilla y atractiva la solución aproximada de Veletsos y Younan (1994; 1995), basada en la hipótesis de esfuerzos verticales (normales) nulos. Esta idealización del suelo fue propuesta originalmente por Arias y col (1981) para calcular presiones dinámicas en muros de retención. La solución de Veletsos y Younan es superior a la de Tajimi (1969), la cual se basa en la hipótesis de desplazamientos verticales nulos. Ambas soluciones, sin embargo, son aplicables a estructuras rígidas empotradas en su base. Para estas condiciones, las acciones del suelo resultan ser excesivamente grandes respecto a las que se tendrían en lumbreras flexibles flotantes. La flexibilidad de la estructura y la traslación-rotación de su base tienen como efecto una reducción notable de dichas acciones. Este efecto ha sido estudiado por Nicolau y col (2001) en pilas de grandes

dimensiones, usando un modelo aproximado de viga sobre cimentación elástica de Winkler.

A continuación se describe un método de frontera para análisis sísmico de sistemas suelo-lumbrera, considerando la flexibilidad del fuste de pared delgada y la flotación del fondo. El modelo consiste de un cilindro elástico, hueco, enterrado en un depósito de suelo con base rígida, formando tres regiones: una interior con la losa de fondo de la lumbrera y el suelo de soporte, otra central con el fuste y el suelo de soporte y otra exterior con el suelo circundante. Para cada región, los desplazamientos y fuerzas se expresan mediante superposición de modos de ondas que se propagan horizontalmente. Posteriormente se imponen las condiciones de frontera en las interfaces entre las tres regiones, dadas por la compatibilidad de desplazamientos y fuerzas en las fronteras elásticas, entresuelo y fuste, y entre fuste y losa de fondo, así como entresuelo circundante y suelo de soporte. También se impone la condición de fuerzas nulas en la cara interior del fuste, donde la superficie está libre de esfuerzos. Como excitación del sistema se considera la incidencia vertical de ondas de cortante. Los modos de ondas en las dos regiones se calculan con el método del estrato delgado, de suerte que la solución es discreta en la dirección vertical y continua en la horizontal.

2 FORMULACION DEL PROBLEMA

2.1 Ecuaciones de movimiento

En la Figura 1 se muestra el sistema suelo-lumbrera investigado. Sean *u, v* y *w* los desplazamientos radial, tangencial y axial, respectivamente, en coordenadas cilíndricas (γ, θ, z) Si el depósito de suelo se subdivide en *N* estratos, las ecuaciones diferenciales que gobiernan el movimiento armónico en el estrato 1 ≤ *j* ≤ *N* son:

$$\nabla^2 u - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{1-2\upsilon_j}\frac{\partial \varepsilon}{\partial r} + \frac{\omega^2}{\beta_j^2} u = 0 \qquad [1]$$

$$\nabla^2 v - \frac{v}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{1-2\upsilon_j}\frac{1}{r}\frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta} + \frac{\omega^2}{\beta_j^2} v = 0 \qquad [2]$$

$$\nabla^2 w + \frac{1}{1-2\upsilon_j}\frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + \frac{\omega^2}{\beta_j^2} w = 0 \qquad [3]$$

Donde; ω es la frecuencia de excitación, υ_j la relación de Poisson y $\beta_j = \sqrt{G_j/\rho_j}$ la velocidad de ondas de corte, siendo G_j el módulo de cortante y ρ_j la densidad; ∇^2 y ε son el Laplaciano y la dilatación, respectivamente, definidos como

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad [4]$$

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(u + \frac{\partial v}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial w}{\partial z} \qquad [5]$$

Los componentes de esfuerzo sobre una superficie cilíndrica están relacionados con los componentes de desplazamiento mediante:

$$\sigma_r = \lambda_j \varepsilon + 2G_j \frac{\partial u}{\partial r} \qquad [6]$$

$$\tau_{rz} = G_j\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}\right) \qquad [7]$$

$$\tau_{r\theta} = G_j\left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) \qquad [8]$$

Donde: $\lambda_j = 2\upsilon_j G_j / (1-2\upsilon_j)$ es la constante de Lamé.

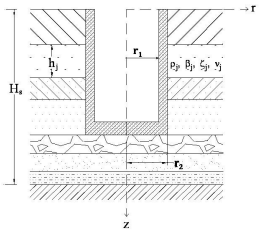

Figura 1. Modelo de interacción dinámica suelo-lumbrera.

2.2 Descomposición acimutal

La simetría axial de la estructura permite realizar una descomposición azimutal de la solución. Según Kausel y Roësset (1975 y 1977), los desplazamientos modales (radial, vertical y tangencial) pueden obtenerse mediante separación de variables como se indica a continuación.
Modos generalizados de Rayleigh en deformación plana:

$$u(r,\theta,z) = \bar{u}(r,z)\begin{Bmatrix} \cos n\theta \\ \operatorname{sen} n\theta \end{Bmatrix}, \text{ con } \bar{u} = kU(z)C_n'(kr) \qquad [9]$$

$$w(r,\theta,z) = \bar{w}(r,z)\begin{Bmatrix} \cos n\theta \\ \operatorname{sen} n\theta \end{Bmatrix}, \text{ con } \bar{w} = -ikW(z)C_n(kr) \qquad [10]$$

$$v(r,\theta,z) = \bar{v}(r,z)\begin{Bmatrix} -\operatorname{sen} n\theta \\ \cos n\theta \end{Bmatrix}, \text{ con } \bar{v} = \frac{n}{r}U(z)C_n(kr) \qquad [11]$$

Modos generalizados de Love en cortante antiplano:

$$u(r,\theta,z) = \bar{u}(r,z)\begin{Bmatrix} \cos n\theta \\ \operatorname{sen} n\theta \end{Bmatrix}, \quad \text{con } \bar{u} = \frac{n}{r}V(z)C_n(kr) \qquad (12]$$

$$w(r,\theta,z)=0 \qquad [13]$$

$$v(r,\theta,z)=\bar{v}(r,z)\begin{Bmatrix}-\operatorname{sen} n\theta\\ \cos n\theta\end{Bmatrix},\ \text{con}\ \bar{v}=kV(z)C_n'(kr) \qquad [14]$$

Donde: k es el número de onda horizontal y n el número de onda azimutal; $C_n(\xi)$ es una solución de la ecuación de Bessel de orden n, dada por

$$C_n''+\frac{1}{\xi}C_n'+\left(1-\frac{n^2}{\xi^2}\right)C_n=0 \qquad [15]$$

El factor armónico en el tiempo $e^{i\omega t}$ se ha omitido por simplicidad. Para modos simétricos con respecto al plano $\theta=0$, $\bar{u}$ y $\bar{w}$ se combinan con $\cos n\theta$ y $\bar{v}$ con $-\operatorname{sen} n\theta$; en cambio, $\bar{u}$ y $\bar{w}$ se combinan con $\operatorname{sen} n\theta$ y $\bar{v}$ con $\cos n\theta$ para modos antisimétricos. Sustituyendo las ecs. 9-14 en las ecs. 6-8, se puede verificar que:

$$\sigma_r(r,\theta,z)=\bar{\sigma}_r(r,z)\begin{Bmatrix}\cos n\theta\\ \operatorname{sen} n\theta\end{Bmatrix}$$
$$f_r(r,\theta,z)=\int\sigma_r(r,\theta,z)dz=\bar{f}_r(r,z)\begin{Bmatrix}\cos n\theta\\ \operatorname{sen} n\theta\end{Bmatrix} \qquad [16]$$

$$\tau_{rz}(r,\theta,z)=\tau_{rz}(r,z)\begin{Bmatrix}\cos n\theta\\ \operatorname{sen} n\theta\end{Bmatrix}$$
$$\rightarrow f_z(r,\theta,z)=\int\tau_{rz}(r,\theta,z)dz=\bar{f}_z(r,z)\begin{Bmatrix}\cos n\theta\\ \operatorname{sen} n\theta\end{Bmatrix} \qquad [17]$$

$$\tau_{r\theta}(r,\theta,z)=\tau_{r\theta}(r,z)\begin{Bmatrix}-\operatorname{sen} n\theta\\ \cos n\theta\end{Bmatrix}$$
$$\rightarrow f_\theta(r,\theta,z)=\int\tau_{r\theta}(r,\theta,z)dz=\bar{f}_\theta(r,z)\begin{Bmatrix}-\operatorname{sen} n\theta\\ \cos n\theta\end{Bmatrix} \qquad [18]$$

donde

$$\bar{f}_r(r,z)=\int\sigma_r(r,z)dz,$$

$$\bar{f}_z(r,z)=\int\tau_{rz}(r,z)dz$$

$$\bar{f}_\theta(r,z)=\int\tau_{r\theta}(r,z)dz.$$

De esta forma se demuestra que la descomposición azimutal de esfuerzos y fuerzas es idéntica a la de desplazamientos. La selección de la función azimutal, $\cos n\theta$ o $\operatorname{sen} n\theta$, depende de la física del problema. Para excitación horizontal x_g, sus componentes en coordenadas cilíndricas son $u_g=x_g\cos\theta$, $w_g=0$ y $v_g=-x_g\operatorname{sen}\theta$. En consecuencia, sólo se requiere del análisis de vibraciones simétricas para el número acimutal n=1 Así, el problema tridimensional se reduce a uno bidimensional en el plano $r-z$.

2.3 Condiciones de frontera

Para resolver el problema de interacción suelo-cimiento, el domino en estudio se divide en tres regiones (ver fig. 1): una interior I ($r\le r_1, H_1\le z\le H_s$) para la losa de fondo del cimiento y el suelo de soporte, otra central O ($r_1\le r\le r_2, 0\le z\le H_s$ para el muro anular y el suelo de soporte, y otra exterior E ($r\ge r_2, 0\le z\le H_s$) para el suelo circundante, siendo r_1 y r_2 los radios interno y externo del cajón de cimentación y H_s el espesor del depósito de suelo. Para satisfacer las condiciones de compatibilidad en las interfaces entre las tres regiones, se utiliza el método de colocación en puntos nodales. En cada región, los campos de desplazamientos y fuerzas nodales pueden construirse mediante la superposición del campo libre y de un campo difractado, como sigue:

$$\delta_{I,E}=\delta_{I,E}^f+\delta_{I,E}^d=\delta_{I,E}^f+\Delta_{I,E}C_{I,E} \qquad [19]$$

$$\delta_O=\delta_O^f+\delta_O^d=\delta_O^f+\Delta_O^+C_O^++\Delta_O^-C_O^- \qquad [20]$$

$$f_{I,E}=f_{I,E}^f+f_{I,E}^d=f_{I,E}^f+F_{I,E}C_{I,E} \qquad [21]$$

$$f_O=f_O^f+f_O^d=f_O^f+F_O^+C_O^++F_O^-C_O^- \qquad [22]$$

siendo $\delta_\varepsilon^{f,d}=\{\bar{u},\bar{w},\bar{v}\}^T$ el vector de desplazamientos, $f_\varepsilon^{f,d}=\{f_r,f_z,f_\theta\}^T$ el vector de fuerzas, Δ_ε la matriz de desplazamientos modales, F_ε la matriz de fuerzas modales y C_ε el vector de coeficientes de participación. El subíndice ε indica región y los superíndices f y d indican campo libre y difractado, respectivamente; asimismo, el superíndice $\pm$ se usa para identificar modos que se propagan (trasmiten energía) en la dirección positiva o negativa de r.

Para satisfacer las condiciones de frontera del problema, se hace uso del método de colocación en puntos nodales. En las interfaces entre regiones ($\Gamma_{I,E}$) se impone la compatibilidad de desplazamientos y fuerzas nodales, mientras que en la cara interna del muro (Γ_O) se anulan las fuerzas nodales; esto es:

$$\delta_E(r_2,z_j)=\delta_O(r_2,z_j),\quad 1\le j\le N_E \qquad [23]$$

$$f_E(r_2,z_j)=f_O(r_2,z_j),\quad 1\le j\le N_E \qquad (24]$$

$$f_O(r_1,z_j)=0,\quad 1\le j\le \Delta N \qquad [25]$$

$$\delta_I(r_1, z_j) = \delta_O(r_1, z_{j+\Delta N}), \quad 1 \le j \le N_I \qquad [26]$$

$$f_I(r_1, z_j) = f_O(r_1, z_{j+\Delta N}), \quad 1 \le j \le N_I \qquad [27]$$

donde $\Delta N = N_E - N_I$, siendo N_I y N_E el número de estratos en las regiones interior y exterior, respectivamente. Sustituyendo las ecs. 19-22 en las ecs. 23-27, se llega al siguiente sistema matricial de ecuaciones algebraicas:

$$\begin{bmatrix} \Delta_E(r_2,z_j) & -\Delta_O^+(r_2,z_j) & -\Delta_O^-(r_2,z_j) & 0 \\ F_E(r_2,z_j) & -F_O^+(r_2,z_j) & -F_O^-(r_2,z_j) & 0 \\ 0 & -F_O^+(r_1,z_j) & -F_O^-(r_1,z_j) & 0 \\ 0 & -\Delta_O^+(r_1,z_{j+\Delta N}) & -\Delta_O^-(r_1,z_{j+\Delta N}) & \Delta_I(r_1,z_j) \\ 0 & -F_O^+(r_1,z_{j+\Delta N}) & -F_O^-(r_1,z_{j+\Delta N}) & F_I(r_1,z_j) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_E \\ C_O^+ \\ C_O^- \\ C_I \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{Bmatrix} \delta_O^f(r_2,z_j) - \delta_E^f(r_2,z_j) & 1 \le j \le N_E \\ f_O^f(r_2,z_j) - f_E^f(r_2,z_j) & 1 \le j \le N_E \\ f_O^f(r_1,z_j) & 1 \le j \le \Delta N \\ \delta_O^f(r_1,z_{j+\Delta N}) - \delta_I^f(r_1,z_j) & 1 \le j \le N_I \\ f_O^f(r_1,z_{j+\Delta N}) - f_I^f(r_1,z_j) & 1 \le j \le N_I \end{Bmatrix}, \qquad [28]$$

Resolviendo este sistema complejo de ecuaciones lineales, se obtienen los coeficientes de participación que definen todos los campos de desplazamientos y fuerzas nodales. Este sistema es determinado en el sentido de que hay tantas ecuaciones como incógnitas. Las ecuaciones planteadas son $6N_I$ en Γ_I, $3\Delta N$ en Γ_O y $6N_E$ en Γ_E, mientras que las incógnitas asociadas a los modos de vibrar son $3N_I$ en I, $6N_E$ en O y $3N_E$ en E. Así, el orden de la ec. 28 es $(3N_I + 9N_E) \times (3N_I + 9N_E)$.

3 IMPLEMENTACION NUMERICA

3.1 Campos difractados

Aplicando el método del estrato delgado (Lysmer y Waas, 1972; Lysmer y Drake, 1972), es fácil demostrar que las eigenfunciones discretas U(z) y W(z) con eigenvalor k que satisfacen las ecuaciones de movimiento en deformación plana, las condiciones de continuidad de esfuerzos y desplazamientos entre estratos y las condiciones de frontera de superficie libre y base rígida, se obtienen resolviendo el problema algebraico de valores característicos

$$\left[k^2\tilde{A} + ik\tilde{B} + \tilde{G} - \omega^2\tilde{M}\right]\tilde{\Lambda} = \tilde{0} \qquad [29]$$

Donde

$$\tilde{\Lambda} = \begin{Bmatrix} \Lambda_{2j-1} = U_j \\ \Lambda_{2j} = W_j \end{Bmatrix}, \quad 1 \le j \le N \qquad [30]$$

es un eigenvector de amplitudes nodales y $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{G}$ y $\tilde{M}$ son matrices de $2N \times 2N$ ensambladas con las matrices de estrato para elementos en deformación plana (Tassoulas y Kaussel, 1983). Al resolver la ec. 29 es necesario seleccionar los valores de k_l y $\tilde{\Lambda}_l$, $1 \le l \le 2N$, tal que los desplazamientos modales en la región exterior decaigan con la distancia. Para cumplir con esta condición de radiación, se requiere que $\mathrm{Im}[k_l] < 0$.

Igualmente es fácil demostrar que la eigenfunción discreta $V(z_j)$ con eigenvalor k que satisface la ecuación de movimiento en cortante antiplano, las condiciones de continuidad de esfuerzo y desplazamiento entre estratos y las condiciones de frontera de superficie libre y base rígida, se obtiene resolviendo el problema algebraico de valores característicos

$$\left[k^2\tilde{A} + \tilde{G} - \omega^2\tilde{M}\right]\tilde{\Lambda} = \tilde{0} \qquad [31]$$

donde

$$\tilde{\Lambda} = \left\{\Lambda_j = V_j\right\}, \quad 1 \le j \le N \qquad [32]$$

es un eigenvector de amplitudes nodales y $\tilde{A}$, $\tilde{G}$ y $\tilde{M}$ son matrices de $N \times N$ ensambladas con las matrices de estrato para elementos en cortante antiplano (Tassoulas y Kaussel, 1983). Al resolver la ec. 31 es necesario seleccionar los valores de k_l y $\tilde{\Lambda}_l$, $1 \le l \le N$, tal que los desplazamientos modales en la región exterior decaigan con la distancia. Para cumplir con esta condición de radiación, se requiere que $\mathrm{Im}[k_l] < 0$.

Una vez resueltos los problemas de valores característicos en deformación plana y cortante antiplano, la matriz de desplazamientos modales en la superficie cilíndrica $r = r_o$ se construye como

$$\tilde{\Delta}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \Delta_{3j-2,l} = \bar{u}_l(r_o, z_j) \\ \Delta_{3j-1,l} = \bar{w}_l(r_o, z_j) \\ \Delta_{3j,l} = \bar{v}_l(r_o, z_j) \end{bmatrix}, \; 1 \le j \le N \text{ y } 1 \le l \le 3N \qquad [33]$$

donde:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_{3j-2,l} &= k_l U_j^l C_n'(k_l r_o) \\ \Delta_{3j-1,l} &= -ik_l W_j^l C_n(k_l r_o) \\ \Delta_{3j,l} &= \frac{n}{r_o} U_j^l C_n(k_l r_o) \end{aligned}\right\}, \quad \text{si } 1 \le l \le 2N \qquad [34]$$

$$\left.\begin{aligned}\Delta_{3j-2,l} &= \frac{n}{r_o} V_j^{l-2N} C_n(k_l r_o)\\ \Delta_{3j-1,l} &= 0\\ \Delta_{3j,l} &= k_l V_j^{l-2N} C_n'(k_l r_o)\end{aligned}\right\}, \quad \text{si } 2N+1 \le l \le 3N \qquad [35]$$

Los eigenvalores $k_1,...,k_{2N}$ y $k_{2N+1},...,k_{3N}$ corresponden a modos generalizados de Rayleigh y Love, respectivamente. Para que haya radiación de ondas en la región exterior debe usarse $C_n(\xi) = H_n^2(\xi)$, que es la función de Hankel de segunda especie y orden n. En tanto que para tener ondas estacionarias en la región interior debe usarse $C_n(\xi) = J_n(\xi)$, que es la función de Bessel de primera especie y orden n.

Las fuerzas nodales actuando en la superficie cilíndrica $r = r_o$ pueden obtenerse integrando los esfuerzos correspondientes con respecto a z. Estas fuerzas discretizadas están en equilibrio estático con los esfuerzos de estrato y son consistentes con la interpolación lineal de desplazamientos considerada. Según Kausel y Roësset (1975 y 1977), el vector de fuerzas nodales correspondiente al modo $\tilde{\Lambda}_l$ con número de onda k_l es

$$\tilde{F}_l = \left\{\begin{aligned}F_{3j-2} &= \bar{f}_r(r_o, z_j)\\ F_{3j-1} &= \bar{f}_z(r_o, z_j)\\ F_{3j} &= \bar{f}_\theta(r_o, z_j)\end{aligned}\right\}_{1\le j\le N} = \qquad [36]$$

$$\left\{k_l^2 \tilde{A}\tilde{\Psi}_l + k_l\left[\tilde{D} - \tilde{E} + n\tilde{N}\right]\tilde{\phi}_l - n\left[\frac{n+1}{2}\tilde{L} + \tilde{Q}\right]\tilde{\Psi}_l\right\}$$

donde $\tilde{A}$, $\tilde{D}$, $\tilde{E}$, $\tilde{N}$, $\tilde{L}$ y $\tilde{Q}$ son matrices de $3N \times 3N$ ensambladas con las matrices de estrato para elementos axisimétricos (Tassoulas y Kaussel, 1983), mientras que $\tilde{\Psi}_l$ y $\tilde{\phi}_l$ son las columnas de las siguientes matrices:

$$\tilde{\Psi} = \begin{bmatrix}\Psi_{3j-2,l}\\ \Psi_{3j-1,l}\\ \Psi_{3j,l}\end{bmatrix}, \quad 1 \le j \le N \text{ y } 1 \le l \le 3N \qquad [37]$$

donde:

$$\left.\begin{aligned}\Psi_{3j-2,l} &= -U_j^l C_n(k_l r_o)\\ \Psi_{3j-1,l} &= -iW_j^l C_{n-1}(k_l r_o)\\ \Psi_{3j,l} &= 0\end{aligned}\right\}, \quad \text{si } 1 \le l \le 2N \qquad [38]$$

$$\left.\begin{aligned}\Psi_{3j-2,l} &= 0\\ \Psi_{3j-1,l} &= 0\\ \Psi_{3j,l} &= -V_j^{l-2N} C_n(k_l r_o)\end{aligned}\right\}, \quad \text{si } 2N+1 \le l \le 3N \qquad [39]$$

y

$$\tilde{\phi} = \begin{bmatrix}\phi_{3j-2,l}\\ \phi_{3j-1,l}\\ \phi_{3j,l}\end{bmatrix}, \quad 1 \le j \le N \text{ y } 1 \le l \le 3N \qquad [40]$$

donde:

$$\left.\begin{aligned}\phi_{3j-2,l} &= U_j^l C_{n-1}(k_l r_o)\\ \phi_{3j-1,l} &= iW_j^l C_n(k_l r_o)\\ \phi_{3j,l} &= 0\end{aligned}\right\}, \quad \text{si } 1 \le l \le 2N \qquad [41]$$

$$\left.\begin{aligned}\phi_{3j-2,l} &= 0\\ \phi_{3j-1,l} &= 0\\ \phi_{3j,l} &= V_j^{l-2N} C_{n-1}(k_l r_o)\end{aligned}\right\}, \quad \text{si } 2N+1 \le l \le 3N \qquad [42]$$

Los vectores $\tilde{F}_l$, $1 \le l \le 3N$, que se obtienen con la ec. 36 son las columnas de la matriz de fuerzas modales

$$\tilde{F}_\varepsilon = \left[\tilde{F}_1, \quad \tilde{F}_2, \quad \Lambda \quad \tilde{F}_{3N}\right] \qquad [43]$$

La función de onda $C_n(\xi)$ que se use para fuerzas modales es la misma que para desplazamientos modales.

3.2 Campos libres

En coordenadas cilíndricas, los desplazamientos de campo libre debidos a la incidencia vertical de ondas de cortante se expresan como

$$\left.\begin{aligned}u(r,\theta,z) &= \bar{u}(r,z)\cos\theta\\ w(r,\theta,z) &= 0\\ v(r,\theta,z) &= -\bar{v}(r,z)\,\text{sen}\,\theta\end{aligned}\right\} \qquad [44]$$

con $\bar{u}(r,z) = \bar{v}(r,z) = V(z)$. Siguiendo la formulación de Tassoulas y Kausel (1983) para propagación vertical, $k = 0$, las amplitudes nodales $V(z_j)$ se obtienen del sistema de ecuaciones algebraicas

$$\left[\tilde{G} - \omega^2 \tilde{M}\right]\tilde{V} = \tilde{0} \qquad [45]$$

donde $\tilde{V} = \{V_j\}$, $1 \le j \le N+1$. Para resolverlo es necesario imponer el movimiento $V_{N+1} = x_g$ en la base, eliminando el último renglón-columna de las matrices $\tilde{G}$ y $\tilde{M}$ y el último elemento de los vectores $\tilde{V}$ y $\tilde{0}$.

Finalmente, con los desplazamientos de campo libre

$$\delta_{\varepsilon}^{f} = \begin{Bmatrix} \delta_{3j-2} = V_j \\ \delta_{3j-1} = 0 \\ \delta_{3j} = V_j \end{Bmatrix}, \quad 1 \le j \le N \tag{46}$$

se obtienen las fuerzas de campo libre

$$\tilde{f}_{\varepsilon}^{f} = \tilde{D}\,\tilde{\delta}_{\varepsilon}^{f} \tag{47}$$

donde $\tilde{D}$ es la matriz usada en la ec. 36 multiplicando las columnas $3j-1$ por menos uno. Debido a la estructura de esta matriz, las fuerzas radial y tangencial son nulas para excitación horizontal.

3.3 Fuerza cortante y momento flexionante

Establecidas las fuerzas nodales $\bar{f}_r^{\,j}$ y $\bar{f}_\theta^{\,j}$ en la superficie cilíndrica $r = r_o$, la fuerza resultante en dirección lateral se determina integrando con respecto a θ:

$$\begin{aligned} F_x^{\,j} &= \int_0^{2\pi} (\,\bar{f}_r^{\,j}\, cos^2\,\theta + \bar{f}_\theta^{\,j}\,\mathrm{sen}^2\,\theta\,)\, r_o\, d\theta \\ &= \pi r_o (\,\bar{f}_r^{\,j} + \bar{f}_\theta^{\,j}\,), \quad 1 \le j \le N \end{aligned} \tag{48}$$

La fuerza resultante en dirección vertical es nula. Nótese que las fuerzas nodales normal y cortante contribuyen en la misma proporción al empuje lateral. Conocidas las fuerzas laterales, el cortante Q_z y el momento M_z al nivel z pueden calcularse por simple estática.

4 RESULTADOS NUMERICOS

En un trabajo anterior, Pérez Rocha y Avilés (2010) presentaron un antecedente de este trabajo que es un modelo de dos regiones para estudiar una lumbrera sólida. Para probar el método, los autores realizaron una comparación con una solución analítica de Veletsos y Younan (1994; 1995) para un cilindro rígido empotrado en la base de un estrato homogéneo. Para una excitación armónica del basamento, se calcularon los valores estáticos de la fuerza cortante y el momento flexionante basales. El cortante $\tilde{Q}_o$ y el momento $\tilde{M}_o$ se normalizados con respecto a $\pi r_o \rho_s \ddot{u}_g H_o^2$ y $\pi r_o \rho_s \ddot{u}_g H_o^3$, respectivamente, donde $\ddot{u}_g$ es la aceleración máxima en roca. Los autores presentaron la variación de los valores estáticos de momento y cortante con respecto a la relación de esbeltez, para un depósito de suelo con $\nu_s = 0$, 1/3 y 1/2, y $\zeta_s = 0.05$. La comparación de resultados numéricos con analíticos mostró una excelente concordancia, especialmente cuando la relación no es cercana a 0.5, porque en la solución analítica se desprecia el componente vertical del movimiento. En la Figura 2 se muestra precisamente la comparación para $\nu_s = 1/2$. Las diferencias crecen al aumentar la esbeltez de la lumbrera, pero en el dominio estudiado, siempre so n menores que 10%

Pérez Rocha y Avilés (2010) también compararon el método presentado con una solución analítica de Nicolau y col (2001) para una viga sobre cimentación elástica. Esta solución es aproximada, basada en un modelo de Winkler. Se comparó la deformación por flexión y el momento flexionante contra los valores calculados con el método desarrollado. La mayor diferencia se observó en la base de la pila y se debe a la condición de frontera usada. Se ha considerado al apoyo libre de esfuerzos, cuando en realidad se tiene una condición de compatibilidad de desplazamientos y fuerzas.

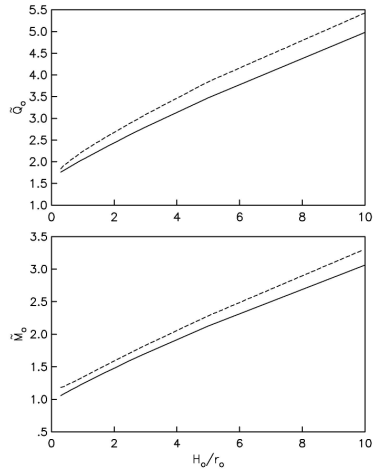

Figura 2. Comparación de valores estáticos del cortante y momento basales obtenidos numéricamente (línea discontinua) contra resultados analíticos (línea continua) para V_s= ½

4.1 Comparación con Zeevaert

Para el diseño de estructuras enterradas, el enfoque más sencillo es que se ignore la interacción de la estructura subterránea con el suelo circundante. Con este enfoque, primero se estiman las deformaciones del suelo en campo libre y luego se diseña la estructura para ajustarse a estas deformaciones. El resultado es aceptable cuando las rigideces de ambos elementos son similares. En caso contrario es necesario considerar los efectos de interacción dinámica debido al contraste de rigidez entre suelo y la estructura. Zeevaert (1983) propuso un método práctico para calcular las fuerzas sísmicas en lumbreras causadas por el movimiento del suelo. Sin embargo, se ignora el efecto de la frecuencia de excitación en la inercia del suelo y la consideración de la excitación sísmica se hace de forma aproximada, especificando la aceleración del suelo en la superficie y estimando la configuración de desplazamientos laterales resultantes. Pese a estas limitaciones, el método es muy útil para ilustrar la importancia de la condición de apoyo (articulación versus empotramiento) de la lumbrera.

En su trabajo, Zeevart (1983) propone un medio estratificado compuesto de 8 estratos, cuyo periodo dominante es T_s=0.95 s. En este medio propone una lumbrera con 2 m de radio y 16 m de longitud, conectada en su base a un túnel que modeló con un resorte en rotación. Para una aceleración de 1 m/s^2 en la superficie del suelo, obtiene los perfiles de cortante (Q_z) y momento (M_z).

De su modelo estratigráfico se dedujeron los parámetros dinámicos que se reportan en la Tabla 1. Para la velocidad de ondas de corte del semiespacio se fijó un valor típico para el valle de México. Los valores de amortiguamiento se escogieron de forma que fueran compatibles con el nivel de deformaciones impuesto por la excitación. La excitación se modeló con acelerogramas sintéticos que cumplen, en promedio, con el espectro de peligro uniforme especificado para el terreno firme del valle de México, escalado de forma que produjera una aceleración de 1 m/s^2 en la superficie de la estratigrafía adoptada.

Los parámetros de la lumbrera son β_o = 2200 m/s, ν_o=0.2, ζ_o=5% y γ_o=2.2 t/m^3. Se seleccionaron tres condiciones para la lumbrera: flotante en el suelo blando (16 m de longitud), apoyada en el semiespacio (17 m de longitud) y enterrada en el semiespacio (18 m de longitud). En las Figs. 3-5 se muestran los resultados para cada una de estas condiciones, respectivamente.

Tabla 1. Propiedades dinámicas del modelo estratigráfico propuesto por Zeevaert (1983).

Estrato	Espesor m	$\beta^{(1)}$ m/s	$\gamma_s^{(2)}$ t/m^3	$\nu_s^{(3)}$ %	$\xi^{(4)}$
1	2	41	1.75	0.45	5
2	2	48	1.70	0.45	5
3	2	57	1.80	0.45	5
4	2	57	1.80	0.45	5
5	2	65	1.85	0.45	5
6	2	65	1.85	0.45	5
7	2	80	1.85	0.45	5
8	3	80	1.85	0.45	5
	∞	500	2.00	0.45	

(1) Velocidad de ondas de corte
(2) Peso volumétrico
(3) Relación de Poisson
(4) Amortiguamiento

A la izquierda de cada figura se ilustran los desplazamientos relativos. La solución exacta del campo libre se indica con línea punteada, mientras que la aproximación obtenida por Zeevaert se indica con línea discontinua. Para cada condición (flotante, apoyada y enterrada) se indica, con línea continua, el desplazamiento relativo de la lumbrera. Nótese que la aproximación de Zeevaert sobreestima el desplazamiento de campo libre en poco más de 20%, y que el desplazamiento relativo de la lumbrera sigue al desplazamiento del terreno cuando ésta es flotante, y que este se reduce a medida que aumenta la condición de empotramiento.

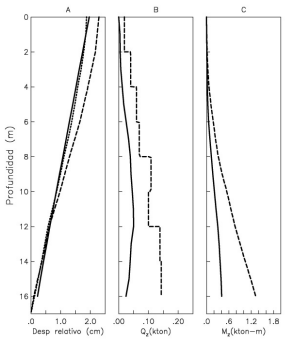

Figura 3. Lumbrera Flotante: A) Desplazamientos relativos con interacción y de campo libre (**....** riguroso y ---- Zeevaert); B) Cortante riguroso y aproximado (---- Zeevaert); C) Momento riguroso y aproximado (---- Zeevaert).

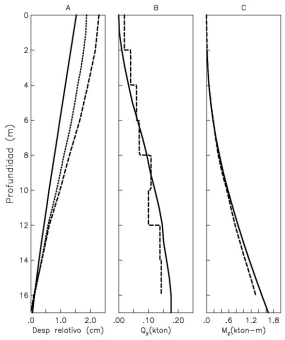

Figura 4. Lumbrera Apoyada: A) Desplazamientos relativos con interacción y de campo libre (riguroso y Zeevaert); B) Cortante riguroso y aproximado (Zeevaert); C) Momento riguroso y aproximado (Zeevaert).

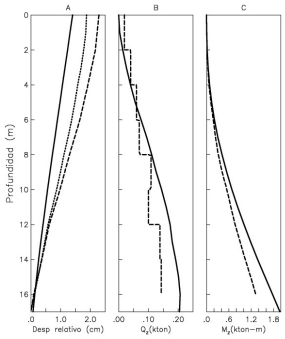

Figura 5. Lumbrera Enterrada: A) Desplazamientos relativos con interacción y de campo libre (riguroso y Zeevaert); B) Cortante riguroso y aproximado (Zeevaert); C) Momento riguroso y aproximado (Zeevaert).

Al centro de cada figura se indican las fuerzas cortantes rigurosas (línea continua) y aproximadas con el método de Zeevaert (línea discontinua). Nótese que la condición de lumbrera flotante reduce substancialmente las fuerzas cortantes comparadas con la lumbrera apoyada (del orden de 85%), y que la aproximación de Zeevart suministra valores ligeramente menores que los

que se obtienen en la condición de lumbrera apoyada (con diferencias de 20% en la base). En la lumbrera enterrada se tiene un incremento de 16% con respecto a la condición de lumbrera apoyada.

Finalmente, a la derecha de cada figura se infican los momentos flexionantes rigurosos (línea continua) y aproximados con el método de Zeevaert (línea discontinua). Nuevamente se aprecia que la condición de lumbrera flotante reduce significativamente los momentos con respecto a la condición de lumbrera apoyada (del orden de 75%), y que, al igual que en las fuerzas cortantes, la aproximación de Zeevart suministra momentos flexionantes ligeramente menores que los que se obtienen en la condición de lumbrera apoyada (17%). En la lumbrera enterrada se tiene un incremento de 19% con respecto a la condición de lumbrera apoyada.

4.2 Efectos de pared delgada

Para estudiar los efectos que tiene el espesor del muro en los valores de fuerza cortante y momento flexionante, se hizo uso de la formulación de condiciones de frontera de tres regiones, suponiendo que la lumbrera está formada por una losa de fondo en la que se apoya un muro perimetral. Se observó que los valores de fuerza cortante y momento flexionante dependen del espesor y rigidez del del muro. Si el muro es infinitamente rígido la solución tiende a la solución analítica de Veletsos y Younan (1994; 1995) para un cilindro rígido empotrado en la base de un estrato homogéneo.

Para el ejemplo se supuso un estrato de suelo con β_s = 100 m/s, v_s=0.45, ζ_s=5% y γ_s=1.5 t/m^3. Para la lumbrera se supuso v_o=0.2, ζ_o=5% y γ_o=2.2 t/m^3. Se estudiaron varios valores de velocidad de ondas de cortante para ver el efecto de la rigidez material de la lumbrera, y varios espesores de muro (dados por el cociente r_1/r_2), para estudiar el efecto de la rigidez geométrica. Además, también se estudiaron dos relaciones de esbeltez. Los valores de velocidad fueron β_o = 200, 400, 800, 1600 y 2400 m/s. Por su parte, el cociente r_1/r_2 se vario entre 0 (lumbrera sólida) y 1 (pared infinitesimalmente delgada, que en el límite es la ausencia de lumbrera y un hueco cilíndrico en el suelo). Para ilustrar este ejemplo, se supuso que la lumbrera está empotrada en la base y se escogieron dos relaciones de esbeltez, H_O / r_2 = 2 y 8.

En la Figura 6 se muestran las variaciones de la fuerza cortante y el momento flexionante en la base de la lumbrera, normalizados respectivamente con $\pi r_o \rho_s \ddot{u}_g H_o^2$ y $\pi r_o \rho_s \ddot{u}_g H_o^3$, donde $\ddot{u}_g$ es la aceleración máxima en roca, para una relación de esbeltez de H_O / r_2 = 2. Es notable que para esta relación de esbeltez, la velocidad β_o = 2400 m/s es suficiente para que la lumbrera se comporte como un cuerpo rígido para el caso sólido (r_1/r_2=0) y hasta valores de r_1/r_2=0.8. La solución ya se había obtenido en la Figura 2, que corresponde a la solución para lumbrera rígida y suelo con v_s=0.45. Para H_O / r_2 = 2, el cortante normalizado $\tilde{Q}_o$ es cercano a 2.4 y el momento normalizado $\tilde{M}_o$ es cercano a 1.5. Para velocidades de ondas de corte en la lumbrera menores que 2400 m/s, se muestra el efecto de la flexibilidad material. Para lumbrera sólida (r_1/r_2=0) los valores de cortante y momento decrecen. A medida que aumenta la relación r_1/r_2, se aprecia el efecto de la flexibilidad del muro pues este se va haciendo cada vez más delgado, hasta que desaparece, quedando la condición de superficie libre (esfuerzo nulo) en la frontera entre el suelo y el hueco que ocupó la lumbrera. Las fuerzas tienden a cero, y por tanto también los cortantes y los momentos. En la Figura 7 se muestran los mismos gráficos, correspondientes a H_O / r_2 = 8. En general, se observan las mismas tendencias que en la Figura 6, con la diferencia que para esta esbeltez, la velocidad β_o = 2400 m/s no es suficiente para que la lumbrera se comporta como un cuerpo rígido. De acuerdo con la Figura 2, una lumbrera rígida con H_O / r_2 = 8, debería desarrollar un cortante $\tilde{Q}_o$ cercano a 4.3 y un momento $\tilde{M}_o$ cercano a 2.7.

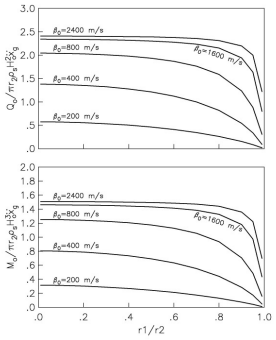

Figura 6. Variación de los valores estáticos del cortante y momento basales para una lumbrera con varias velocidades de ondas de corte β_o y varios espesores de muro, dados por el cociente r1/r2 (0 es lumbrera sólida y 1 es lumbrera con pared infinitesimalmente delgada), para H_O / r_2 = 2.

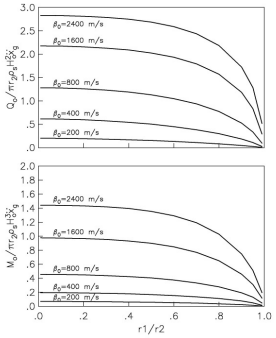

Figura. 7. Variación de los valores estáticos del cortante y momento basales para una lumbrera con varias velocidades de ondas de corte β_o y varios espesores de muro, dados por el cociente r1/r2 (0 es lumbrera sólida y

1 es lumbrera con pared infinitesimalmente delgada), para $H_O / r_2 = 8$.

5 CONCLUSIONES

Se ha presentado un método de superposición modal para análisis sísmico de lumbreras flexibles flotantes de pared delgada, validado con resultados teóricos de lumbreras rígidas empotradas en su base (solución de Veletsos y Younan, 1995) y con resultados numéricos aproximados para un pilote enterrado en un medio formado por dos estratos (Nicolau y col, 2001). El método también se validó con un resultado numérico aproximado de una lumbrera apoyada elásticamente (Zeevaert, 1983). Se observó que la flotación del fondo tiene gran influencia en la magnitud y distribución de las acciones del suelo. En las tres comparaciones se obtuvieron excelentes resultados. Finalmente se, estudió el efecto del espesor de la pared en la flexibilidad de la lumbrera. Se observó que los cortantes y momentos tienden correctamente a cero cuando el espesor de la pared tiende a cero, pues en este límite, solo queda la condición de esfuerzo nulo en la superficie libre de la pared del suelo. También se observó que si la relación de esbeltez es pequeña (lumbrera robusta), con velocidades de cortante del orden de β_o = 2400 m/s en la lumbrera, ésta se comporta como cuerpo rígido. Cuando la esbeltez de la lumbrera crece, la flexibilidad geométrica de la lumbrera crece, requiriendo velocidades mayores para comportarse como un cuerpo rígido

REFERENCIAS

Arias A, Sánchez-Sesma F J and Ovando-Shelley E, A simplified elastic model for seismic analysis of earth-retaining structures with limited displacements, Int. Conf. on Recent Advances in Geotechnical Earthquake Engineering and Soil Dynamics, St. Louis, MO, pp. 235-240, 1981.

Kausel E, Roësset J M and Wash G, Dynamic analysis of footings on layered media, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 101, pp. 679-693, 1975.

Kausel E y Roësset J M, Dynamic stiffness of circular foundations, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 101, pp. 771-785, 1975.

Kausel E y Roësset J M, Semianalytic hyperelement for layered strata, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 103, pp. 569-588, 1977.

Lysmer J y Drake L A, A finite element method for seismology, Methods in Computational Physics. Advances in Research and Applications, Ed. B A Bolt, Vol. 11: Surface Waves and Earth Oscillations, Academic Press, 1972.

Lysmer J y Waas G, Shear waves in plane infinite structures, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 98, pp. 85-105, 1972.

Nicolau S, Mylonakis G, Gazetas G y Tazoh T, Kinematic pile bending during earthquakes: analysis and field measurements, Géotechnique, Vol. 51, pp. 425-440, 2001.

Pérez Rocha L E y Avilés López J (2010). Determinación de acciones sísmicas en lumbreras enterradas en suelo blando. Primer Simposio sobre túneles y lumbreras. Amitos, Cd de México.

Tajimi H, Dynamic analysis of a structure embedded in an elastic stratum, Fourth World Conference on Earthquake Engineering, Santiago, Chile, pp. 53-69, 1969.

Tassoulas J L y Kausel E, Elements for the numerical analysis of wave motion in layered media, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 19, pp. 1005-1032, 1983.

Veletsos A S y Younan A H, Dynamic soil pressures on rigid cylindrical vaults, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 23, pp. 645-669, 1994.

Veletsos A S y Younan A H, Dynamic modeling and response of rigid embedded cylinders, Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 121, pp. 1026-1035, 1995